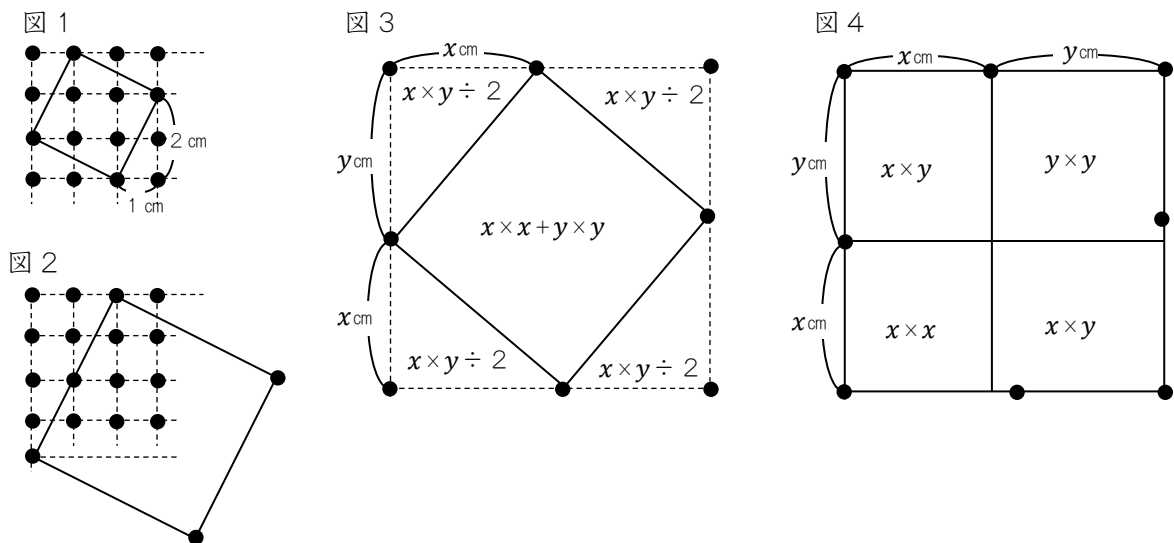


最難関問題

正方形内部の点の個数

1マス1cmの方眼上の点を結んで、図1のように正方形を作ります。その際、正方形の辺は、図2のように、両端の頂点以外の点を通過することがないようにします。図1の正方形は、辺が1cm、2cmの傾きをしているので、値を小さい順に並べて、(1, 2)と表すことにします。正方形(1, 2)の面積は 5 cm^2 で、正方形内部の点の数は、頂点の数も含めることとして、8個です。

このようにしてできる正方形(x, y)の面積は、図3のように1辺が $x+y$ (cm)の正方形から直角をはさむ2辺の長さが $x\text{ cm}$ 、 $y\text{ cm}$ の三角形4個分の面積である $x \times y \div 2$ を引くことによって求めることができます。1辺が $x+y$ (cm)の正方形の面積は図4のように求めることができるので、正方形(x, y)の面積は、 $x \times x + y \times y$ (cm^2)です。このことを参考に、以下の問いに答えなさい。



(1) (7, 9) の正方形の面積は何 cm^2 ですか。また、正方形内部の点の数は何個ですか。

(2) (5, y) の正方形の面積が 89 cm^2 でした。(5, y) の正方形内部の点の数は何個ですか。

(3) (x, y) の正方形内部の点の個数が613個でした。(x, y) の正方形の面積は何 cm^2 ですか。

最難関問題

正方形内部の点の個数 (1) 130 cm^2 , 133個 (2) 92個 (3) 610 cm^2

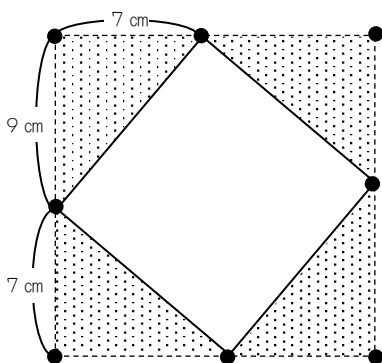
(1) 面積は、 $7 \times 7 + 9 \times 9 = 130\text{ (cm}^2\text{)}$ です。点の個数についても、面積と同じ手順で考えてみます。図①の1辺16cmの正方形内部の点の数は、全部で $(16 + 1) \times (16 + 1) = 289$ (個)です。そのうち、周りの直角三角形の部分にある点の数は、 $((7 + 1) \times (9 + 1) - 2) \div 2 \times 4 = 156$ (個)です。よって、 $289 - 156 = 133$ (個)です。

(2) $5 \times 5 + y \times y = 89$ より、 $y \times y = 89 - 25 = 64$, $y = 8$ です。正方形(5, 8)について(1)と同じ手順で内部の点の数を求めると、 $(13 + 1) \times (13 + 1) - ((5 + 1) \times (8 + 1) - 2) \div 2 \times 4 = 92$ (個)です。

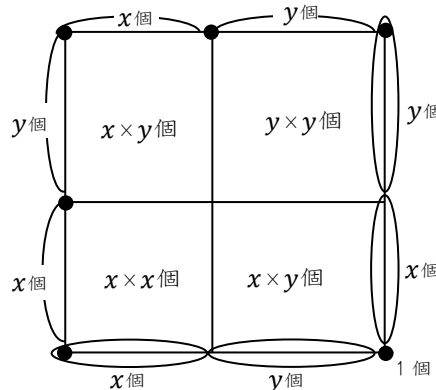
(3) 何となく、面積+3が内部の点の個数になっている気がしますが、正方形(x, y)の内部の点の個数を求める式を考えていきましょう。1辺が $x + y$ (cm)の正方形の点の個数は、 $(x + y + 1) \times (x + y + 1)$ であり、これは図②のようになります。図③に示した周りの直角三角形の部分にある点の数は、 $((x + 1) \times (y + 1) - 2) \div 2 \times 4$
 $= (x \times y + x + y - 1) \div 2 \times 4$
 $= x \times y \times 2 + x \times 2 + y \times 2 - 2$ です。
 これを図②の個数から除くと、ちょうど $x \times y \times 2$ と $x \times 2$ と $y \times 2$ が打ち消し合うので、 $x \times x + y \times y + 1 + 2 = x \times x + y \times y + 3$ となるので、確かに面積+3が内部の点の個数になります。よって、 $613 - 3 = 610$ より、 610 cm^2 です。

なお、このときの(x, y) = (13, 21)です。

図①



図②



図③

