

切手（剰余類）のずらしの問題・1

ある地方では、1円、2円、3円、…、99円、100円、と金額が円の単位で1以上100以下の整数にあたる切手が発行されています。

7円切手1枚か8円切手何枚かを用いると、右の図において○をつけた金額を作ることができます。○をつけた金額に7を次々と加えてできる金額は、7円切手を加えることで作ることができるので、7円切手か8円切手を組み合わせることで、影をつけた

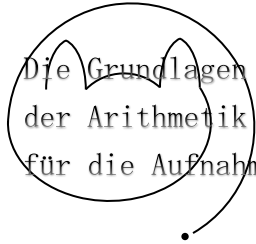
1	8	15	22	29	36	43	50	▶...
2	9	16	23	30	37	44	51	▶...
3	10	17	24	31	38	45	52	▶...
4	11	18	25	32	39	46	53	▶...
5	12	19	26	33	40	47	54	▶...
6	13	20	27	34	41	48	55	▶...
7	14	21	28	35	42	49	56	▶...

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ （通り）の金額を除いてあらゆる金額を作ることができます。

このことを参考に、以下の問いに答えなさい。

- (1) 7円切手と9円切手を組み合わせても作ることができない金額は何通りありますか。また、7円切手と10円切手を組み合わせても作ることができない金額は何通りありますか。
- (2) 7円切手と15円切手を組み合わせても作ることができない金額は何通りありますか。
- (3) 7円切手と 円切手を組み合わせても作ることができない金額が以下の数である場合、 にあてはまる数を答えなさい。ない場合は、「ない」と答えなさい。

- ① 100通り
- ② 102通り
- ③ 171通り



切手（剰余類）のずらしの問題・1

- (1) 9円…24通り, 10円…27通り (2) 42通り
 (3) ①ない ②ない ③58

「切手の金額が100円以下」という条件は以上の考えにおいて特に関係はありません。無限の金額の切手があるという設定はさすがに苦しいので、つけ加えています。

- (1) 7円切手と9円切手の場合は図①のようになって、 $5 + 1 + 6 + 2 + 7 + 3 = 24$ （通り）、7円切手と10円切手の場合は図②のようになって、 $7 + 4 + 1 + 8 + 5 + 2 = 27$ （通り）です。

図①

1	8	15	22	29	36	43	50	57	▶...
2	9	16	23	30	37	44	51	58	▶...
3	10	17	24	31	38	45	52	59	▶...
4	11	18	25	32	39	46	53	60	▶...
5	12	19	26	33	40	47	54	61	▶...
6	13	20	27	34	41	48	55	62	▶...
7	14	21	28	35	42	49	56	63	▶...

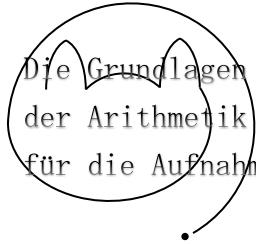
図②

1	8	15	22	29	36	43	50	57	64	▶...
2	9	16	23	30	37	44	51	58	65	▶...
3	10	17	24	31	38	45	52	59	66	▶...
4	11	18	25	32	39	46	53	60	67	▶...
5	12	19	26	33	40	47	54	61	68	▶...
6	13	20	27	34	41	48	55	62	69	▶...
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	▶...

- (2) 図③のようになります。 $15 \div 7 = 2$ 余り1より1段目で影をつけた数は2個, $30 \div 7 = 4$ 余り2より2段目で影をつけた数は4個, ...となるので, $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42$ （通り）です。

図③

1	8	15	...						
2	...	30	...						
3	...	45	...						
4	...	60	...						
5	...	75	...						
6	...	90	...						
7	...								



最難関問題

ここで①と②を比べると、図⑧のようになります。影をつけたのはそれぞれを3, 4, 5倍した数で、表の列が1つずつずれています。よって、7円切手と①の金額の切手を組み合わせた場合より、②の金額の切手を組み合わせた場合の方が、作ることができない金額が3つ増えます。

②と③を比べると図⑨のようになり、やはり7円切手と組み合わせた場合に作ることができない金額が3つ増えます。③と④、④と⑤、⑤と⑥でも同様です。

図⑧

1	...	①	...	④	...	⑤	...	②	...	③	...	⑥
2	...	②	...	①	...	③	...	④	...	⑥	...	⑤
3	...	③	...	⑤	...	①	...	⑥	...	②	...	④
4	...	④	...	②	...	⑥	...	①	...	⑤	...	③
5	...	⑤	...	⑥	...	④	...	③	...	①	...	②
6	...	⑥	...	③	...	②	...	⑤	...	④	...	①
7

図⑨

1	...	①	...	④	...	⑤	...	②	...	③	...	⑥
2	...	②	...	①	...	③	...	④	...	⑥	...	⑤
3	...	③	...	⑤	...	①	...	⑥	...	②	...	④
4	...	④	...	②	...	⑥	...	①	...	⑤	...	③
5	...	⑤	...	⑥	...	④	...	③	...	①	...	②
6	...	⑥	...	③	...	②	...	⑤	...	④	...	①
7

また、①より7多い数、つまりは①の次の7で割って余りが1となる数の場合、①との差が7, 14, 21, ...と①より列が1つ、2つ、3つ...ずれていくので、7円切手と組み合わせた場合に作ることができない金額は、 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ (個) 増えます。

よって、結局は7円切手と8円切手を組み合わせたところから順に9円切手, 10円切手, ...と金額を1つ増やすごとに作ることができない金額は3つずつ増えていくこととなります。ただし、7の倍数の金額の切手の場合のみは作ることができない金額が無限になります。

①の100通りの場合、作ることができない金額は8円切手のときの21通りから3ずつ増えていくので必ず3の倍数になるので、条件を満たす金額の切手はありません。

②の102通りの場合、 $(102 - 21) \div 3 = 27$, $8 + 27 = 35$ となって35円切手となってしまいますが、35は7の倍数なので、条件を満たしません。

③の171通りの場合、 $(171 - 21) \div 3 = 50$, $8 + 50 = 58$ となって58円切手です。