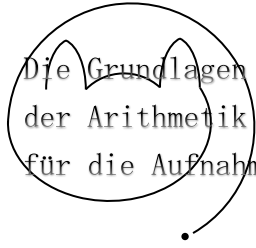


## 最難関問題

2020の問題・2

$\frac{1}{2020}, \frac{2}{2020}, \dots, \frac{2019}{2020}$  の2019個の分数を小数にします。小数第202位が3となるものは何個ありますか。



## 最難関問題

2020の問題・2 200個

2020 = 20 × 101 です。分母が20の分数を小数にすると、 $\frac{M}{20} = \frac{M \times 5}{100}$  となるので、小数第2

位までの小数になります。他方で、分母が101の真分数  $\frac{N}{101}$  は101が2とも5とも異なる素数である

ために、無限に続く小数になります。このことから、 $\frac{\square}{2020}$  の分子  $\square$  について、 $\square \div 101 = M$  余り

N のとき、 $\frac{\square}{2020} = \frac{M \times 101 + N}{2020} = \frac{M}{20} + \frac{N}{2020}$  として、 $\frac{N}{2020}$  に注目します。

$\frac{N}{2020}$  は  $\frac{1}{2020} \sim \frac{100}{2020}$  です。 $\frac{1}{2020}$  を小数にすると、 $1 \div 2020 = 0.00049504$

95... と小数第3位から  $\boxed{0495}$  の繰り返しになります。繰り返しになる部分を  $\square$  で囲うと、

$\frac{2}{2020} = 0.00\boxed{0495} \times 2 = 0.00\boxed{0990}$  ( $0.0\boxed{0099}$  と考えることもできます) のように49

5の倍数の繰り返しとなります。ただし、例えば  $495 \times 41 = 20295$  のように5桁になる場合もありますから、495の倍数の桁数について場合分けをします。

○495 × N が4けたの場合

N は最大で、 $495 \times 20 = 9900$  となる場合の20です。 $495 \times N = \text{アイウエ}$  のときに、

$\frac{N}{2020} = 0.00\boxed{\text{アイウエ}}$  となります。小数第202位になるのはエですが、エは0か5のいずれかです。

よって、 $495 \times N$  が4桁の場合は条件を満たすものはありません。

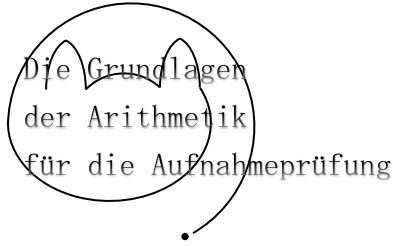
○495 × N が5けたの場合

N は  $495 \times 100 = 49500$  より、N は21以上100以下です。 $495 \times N = \text{アイウエオ}$  のとき、

$\frac{N}{2020}$  は次のたし算によって求められます。

$$\begin{array}{r}
 0.0 \text{ アイウエオ} \\
 \phantom{0.0} \text{ アイウエオ} \\
 + \phantom{0.0} \phantom{\text{アイウエオ}} \text{ アイウ}\dots \\
 \hline
 \end{array}$$





## 最難関問題

・(ア, オ) = (8, 5) の場合

$$\begin{array}{r}
 0.08\text{イウエ}5 \\
 \phantom{0.0}8\text{イウエ}5 \\
 + \phantom{0.0}8\text{イウ}\dots \\
 \hline
 \phantom{0.0}3 \phantom{0.0}3
 \end{array}$$

(ア, オ) = (8, 5) の場合,  $495 \times N = 8\text{イウエ}5$  です。ところが,  $495 \times N$  は最大で  $495 \times 100 = 49500$  でした。実際,  $495 \times N$  が  $80000$  以上  $90000$  未満で  $N$  が奇数であるという条件からは,  $80000 \div 495 = 161.\dots$ ,  $90000 \div 495 = 181.\dots$  より,  $N$  は  $163$  から  $181$  までの  $10$  個の奇数になります。しかし  $N$  は  $100$  以下の整数ですから, 条件に反します。

以上の事態は, 次のように考えられます。

$\frac{62}{2020}$  から  $\frac{80}{2020}$  までの  $10$  個の分数について,  $\frac{M}{20} = \frac{M \times 101}{2020}$  を加えていきます。つまり,  $N$  として考えられる  $62$  から  $80$  までの偶数に,  $1919$  以下の  $101$  の倍数を加えていくわけです。すると,  $62 + 101 = 163$ ,  $\dots$ ,  $80 + 101 = 181$  となりますから, (ア, オ) = (8, 5) の場合は (ア, オ) = (3, 0) の場合の一種と考えることができます。よって, (ア, オ) = (3, 0) の場合のみを考えます。

$80 + 1919 = 1999$  より,  $N$  が  $62$  から  $80$  までのどの偶数であっても,  $1919$  以下のどの  $101$  の倍数を加えても  $2020$  以上になることはありません。よって,  $N$  の選び方が  $10$  通り,  $101$  の倍数の選び方は  $101 \times 0 = 0$  もふくめて  $20$  通りですから,  $10 \times 20 = 200$  (個) です。