最難関問題

２０２０の問題・２

$\dfrac{1}{2020}$，$\dfrac{2}{2020}$，…，$\dfrac{2019}{2020}$の２０１９個の分数を小数にします。小数第２０２位が３となるものは何個ありますか。

最難関問題

２０２０の問題・２　２００個

　２０２０＝２０×１０１です。分母が２０の分数を小数にすると，$\dfrac{M}{20}=\dfrac{M\times 5}{100}$となるので，小数第２位までの小数になります。他方で，分母が１０１の真分数$\dfrac{N}{101}$は１０１が２とも５とも異なる素数であるために，無限に続く小数になります。このことから，$\dfrac{\square}{2020}$の分子□について，□÷１０１＝Ｍ余りＮのとき，$\dfrac{\square}{2020}=\dfrac{M\times 101+N}{2020}=\dfrac{M}{20}+\dfrac{N}{2020}$として，$\dfrac{N}{2020}$に注目をします。

　$\dfrac{N}{2020}$は$\dfrac{1}{2020}$～$\dfrac{100}{2020}$です。$\dfrac{1}{2020}$を小数にすると，１÷２０２０＝０.０００４９５０４９５…と小数第３位から$\boxed{0495}$の繰り返しになります。繰り返しになる部分を□で囲うと，

$\dfrac{2}{2020}=0.00\boxed{0495}\times 2=0.00\boxed{0990}$（$0.0\boxed{0099}$と考えることもできます）のように４９５の倍数の繰り返しとなります。ただし，例えば４９５×４１＝２０２９５のように５桁になる場合もありますから，４９５の倍数の桁数について場合分けをします。

〇４９５×Ｎが４けたの場合

　Ｎは最大で，４９５×２０＝９９００となる場合の２０です。４９５×Ｎ＝アイウエのときに，

$\dfrac{N}{2020}=0.00\boxed{\text{アイウエ}}$となります。小数第２０２位になるのはエですが，エは０か５のいずれかです。よって，４９５×Ｎが４桁の場合は条件を満たすものはありません。

〇４９５×Ｎが５けたの場合

　Ｎは４９５×１００＝４９５００より，Ｎは２１以上１００以下です。４９５×Ｎ＝アイウエオのとき，

$\dfrac{N}{2020}$は次のたし算によって求められます。

```
  ０.０アイウエオ
           アイウエオ
＋                  アイウ…
─────────────────────
```

最難関問題

小数第２０２位が３になるためには，小数第６位，１０位，１４位，…が３になればよいので，その条件を書き加えます。

```
　０.０アイウエオ
　　　　　　アイウエオ
＋　　　　　　　　　アイウ…
────────────────
　　　　　　３　　　３
```

この条件を満たすのは，ア＋オの一の位が３でイが置かれた位からのくり上がりがない場合か，ア＋オの一の位が２でイが置かれた位からのくり上がりがある場合です。

イが置かれた位からのくり上がりがある場合

ア＋オ＝１２で，イ，ウ，エがみな９の場合にくり上がりがおきます。オは０か５ですから，アとの和が１２となるのはアが７，オが５の場合のみです。

```
　０.０７９９９５
　　　　　　７９９９５
＋　　　　　　　　　７９９…
────────────────
　　　　　　３　　　３
```

ところが，７９９９５÷４９５は割り切れませんから，条件を満たしません。

イが置かれた位からのくり上がりがない場合

（ア，オ）＝（３，０），（８，５）の２通りが考えられます。

･（ア，オ）＝（３，０）の場合

```
　０.０３イウエ０
　　　　　　３イウエ０
＋　　　　　　　　　３イウ…
────────────────
　　　　　　３　　　３
```

（ア，オ）＝（３，０）の場合，４９５×Ｎ＝３イウエ０です。４９５×Ｎが３００００以上４００００未満で，Ｎが偶数であればよいので，３００００÷４９５＝６０.…，４００００÷４９５＝８０.…より，Ｎは６２から８０までの１０個の偶数です。

最難関問題

・（ア，オ）＝（８，５）の場合

```
  ０.０８イウエ５
          ８イウエ５
＋                ８イウ…
―――――――――――――――――――――――――
          ３      ３
```

（ア，オ）＝（８，５）の場合，４９５×Ｎ＝８イウエ５です。ところが，４９５×Ｎは最大で４９５×１００＝４９５００でした。実際，４９５×Ｎが８００００以上９００００未満でＮが奇数であるという条件からは，８００００÷４９５＝１６１.…，９００００÷４９５＝１８１.…より，Ｎは１６３から１８１までの１０個の奇数になります。しかしＮは１００以下の整数ですから，条件に反します。

以上の事態は，次のように考えられます。

$\frac{62}{2020}$から$\frac{80}{2020}$までの１０個の分数について，$\frac{M}{20}=\frac{M\times 101}{2020}$を加えていきます。つまり，Ｎとして考えられる６２から８０までの偶数に，１９１９以下の１０１の倍数を加えていくわけです。すると，６２＋１０１＝１６３，…，８０＋１０１＝１８１となりますから，（ア，オ）＝（８，５）の場合は（ア，オ）＝（３，０）の場合の一種と考えることができます。よって，（ア，オ）＝（３，０）の場合のみを考えます。

８０＋１９１９＝１９９９より，Ｎが６２から８０までのどの偶数であっても，１９１９以下のどの１０１の倍数を加えても２０２０以上になることはありません。よって，Ｎの選び方が１０通り，１０１の倍数の選び方は１０１×０＝０もふくめて２０通りですから，１０×２０＝２００（個）です。