受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

反射と多角形パズル・１

図１のように辺ＡＢとＢＣの長さが等しい台形ＡＢＣＤにおいて，頂点Ａから辺ＣＤに向けて小さな球を発射します。球は辺にぶつかると，図２のように入ってきたときと同じ角度ではね返ります。球は頂点にぶつかると停止します。以下の問いに答えなさい。必要であれば，２枚目のマス目を使いなさい。

図１

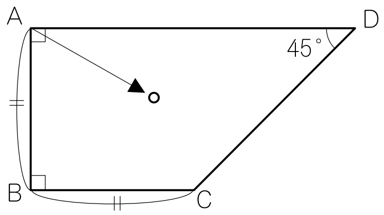
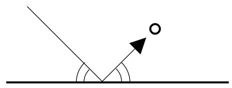


図２



（１）頂点Ａから辺ＣＤの真ん中の点に向けて球を発射すると，何回はね返ってどの頂点で停止しますか。

（２）頂点Ａから辺ＣＤ上の頂点Ｄから$\frac{2}{5}$の点に向けて球を発射すると，何回はね返ってどの頂点で停止しますか。

（３）頂点Ａから辺ＣＤ上の頂点Ｄから$\frac{4}{9}$の点に向けて球を発射すると，何回はね返ってどの頂点で停止しますか。

（４）頂点Ａから辺ＣＤ上の点に向けて球を発射したところ，４回はね返ってから球は頂点にぶつかって停止しました。辺ＣＤ上の頂点Ｄから何分の何の点に向けて発射しましたか。考えられるものをすべて答えなさい。

（５）頂点Ａから辺ＣＤ上の点に向けて球を発射したところ，５回はね返ってから球は頂点にぶつかって停止しました。辺ＣＤ上の頂点Ｄから何分の何の点に向けて発射しましたか。考えられるものをすべて答えなさい。

最難関問題

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

反射と多角形パズル・１

（１）２回，頂点Ｃ　（２）３回，頂点Ｂ　（３）１５回，頂点Ａ

（４）辺ＣＤ上の頂点Ｄから$\frac{1}{3}$の点，辺ＣＤ上の頂点Ｄから$\frac{4}{7}$の点

（５）辺ＣＤ上の頂点Ｄから$\frac{3}{4}$の点

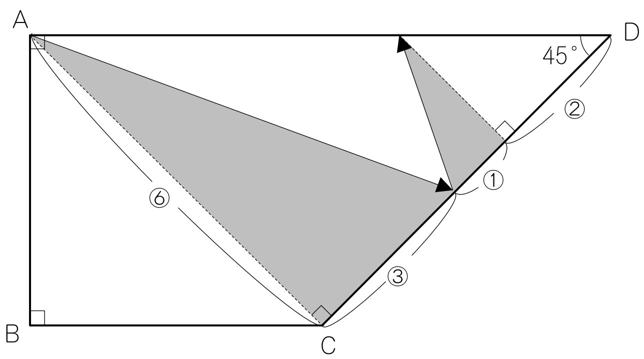
（１）２通りの解説をします。鏡映しの解法の方が簡単なので，（２）以降はそちらを使います。

台形ＡＢＣＤの内部で相似を利用する場合

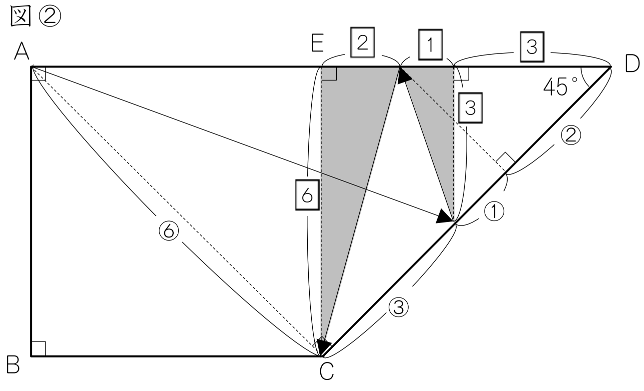
図①において影をつけた三角形が相似であることから，ＡＣ，ＣＤの長さを⑥とすると図のような長さの関係が成り立ちます。

次に，図②のＥＣの長さを$\boxed{6}$とすると，影をつけた三角形の相似により，頂点Ｃに２回はね返って停止します。

図①



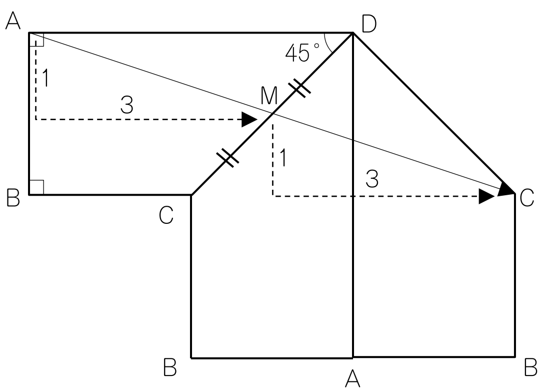
図②



台形ＡＢＣＤの鏡映しを作る場合

図③のように，台形ＡＢＣＤを鏡映しにして球をまっすぐ進めます。ＡＢ，ＢＣの長さを２，ＡＤの長さを４とすると，頂点Ａから辺ＣＤの中点Ｍにぶつかるまでに球は＜下に１，右に３＞進みます。点Ｍからさらに＜下に１，右に３＞進むと頂点Ｃにぶつかって球は停止します。実線の矢印は辺ＣＤとＡＤを１回ずつ通過しているので，はね返る回数は２回です。

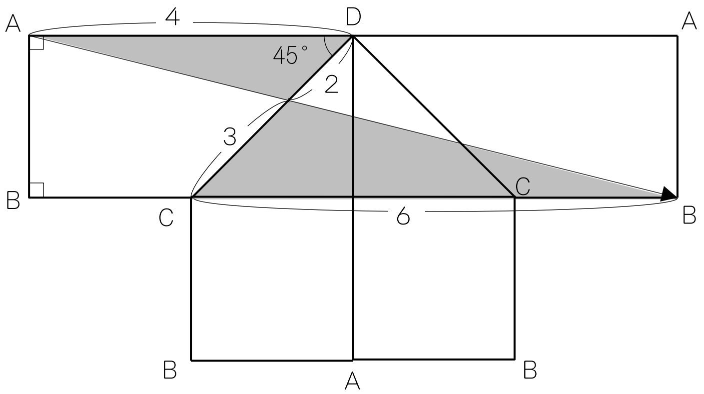
図③



最難関問題

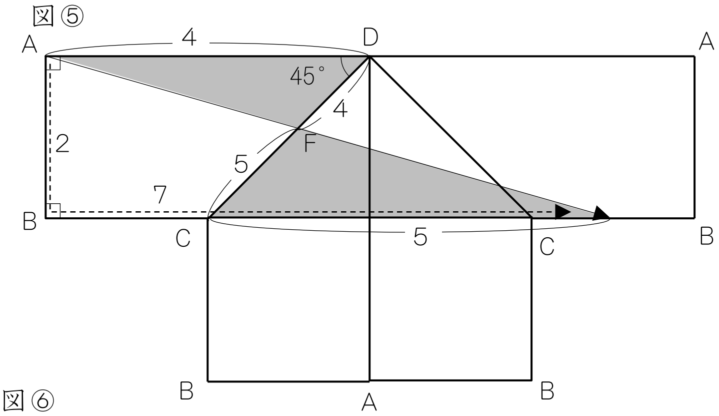
（２）図④のように影をつけた三角形が２：３の相似となるので，３回はね返って頂点Ｂで停止します。

図④

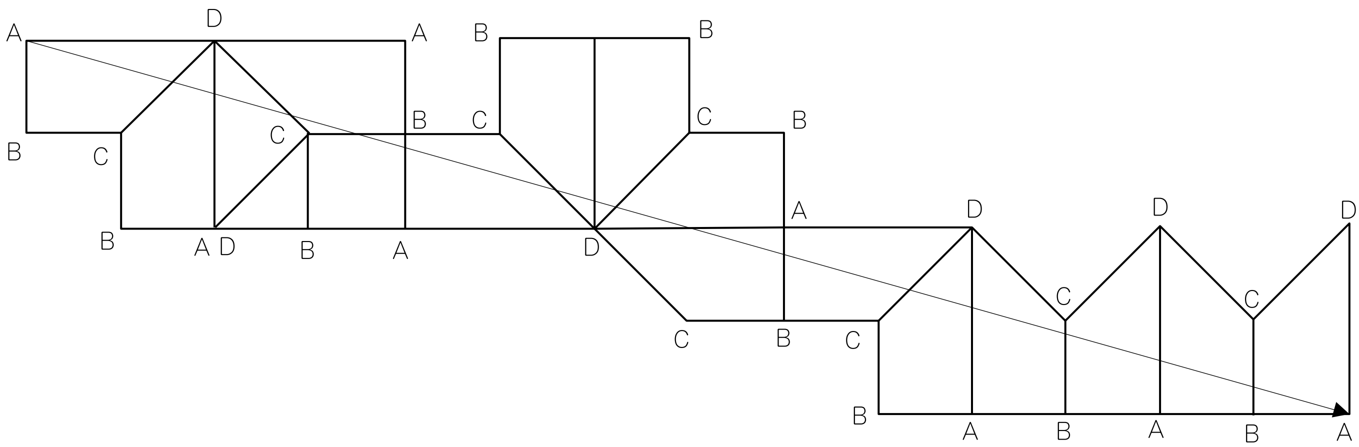


（３）図⑤のように影をつけた相似を作ることができるので，実線の矢印は＜下に２，右に７＞進みます。
ここから先はマス目を使って考えた方がやりやすいでしょう。図⑥のように，１５回はね返って頂点Ａで停止します。

図⑤



図⑥

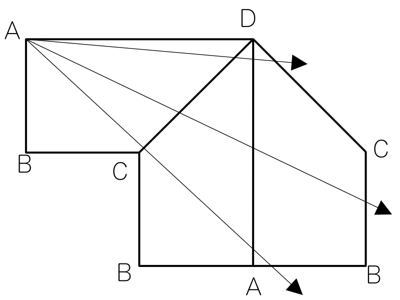


（４）図⑦のように，球は１回目に辺ＣＤではね返り，２回目に辺ＡＤではね返ります。３回目は辺ＣＤ，ＢＣ，ＡＢのいずれかではね返ります。

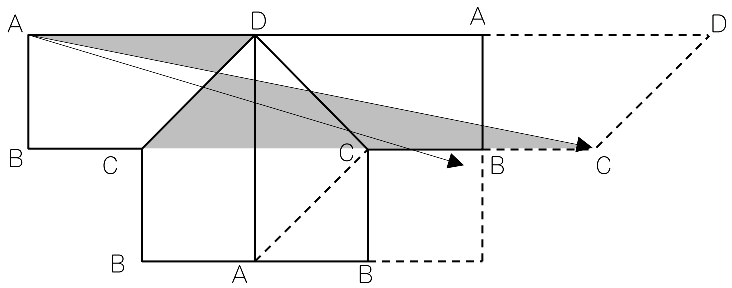
３回目に辺ＣＤではね返る場合

図⑧のように，４回目に辺ＡＢではね返って頂点Ｃにぶつかって止まることができます。このとき，影をつけた三角形は４：８＝１：２の相似なので，球は頂点Ａから辺ＣＤ上の頂点Ｄから$\frac{1}{3}$の点に向けて発射されます。

図⑦



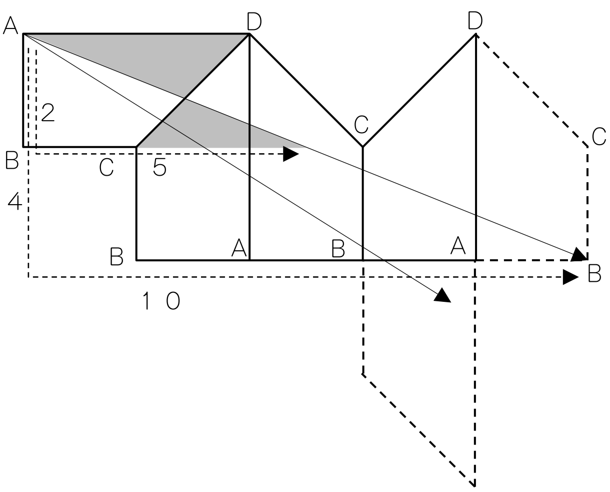
図⑧



３回目に辺ＢＣではね返る場合

図⑨のように，４回目に辺ＡＤではね返って頂点Ｂにぶつかって止まることができます。このとき，実線の矢印は＜下に４，右に１０＞，つまりは＜下に２，右に５＞進みます。よって，影をつけた三角形は４：３の相似ですから，球は頂点Ａから辺ＣＤ上の頂点Ｄから$\frac{4}{7}$の点に向けて発射されます。

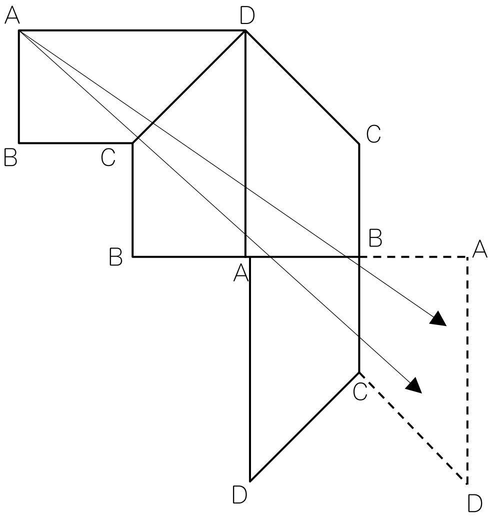
図⑨



３回目に辺ＡＢではね返る場合

図⑩のように，４回目に辺ＢＣではね返ることになりますが，５回目にはね返ることなくいずれかの頂点にぶつかることはできません。

図⑩



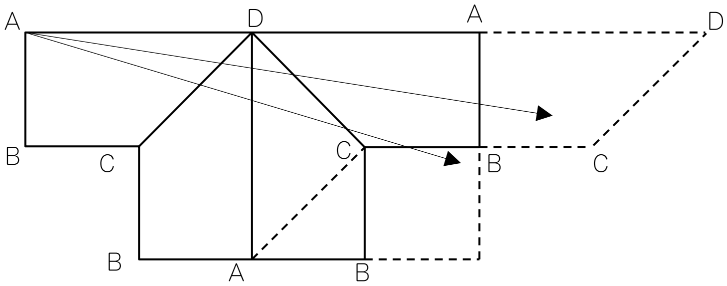
以上より，辺ＣＤ上の頂点Ｄから$\frac{1}{3}$の点と辺ＣＤ上の頂点Ｄから$\frac{4}{7}$の点です。

（５）（４）の図⑦より，球は３回目は辺ＣＤ，ＢＣ，ＡＢのいずれかではね返ります。

３回目に辺ＣＤではね返る場合

図⑪のように，４回目に辺ＡＢかＢＣではね返ります。

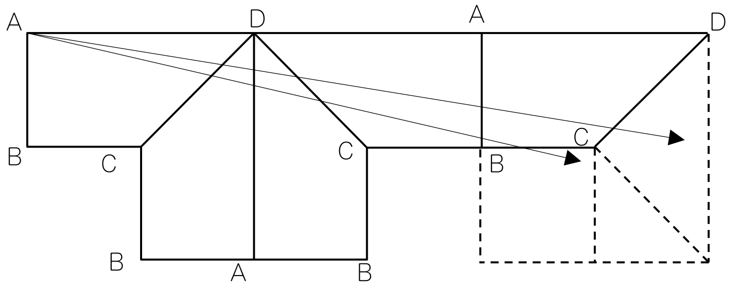
図⑪



最難関問題

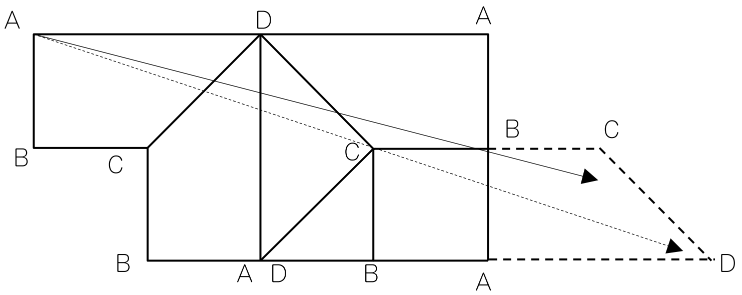
４回目に辺ＡＢではね返った場合，図⑫のように５回目に辺ＣＤではね返っても，辺ＢＣではね返っても，その次にいずれかの頂点にぶつかることはできません。

図⑫



また，４回目に辺ＢＣではね返った場合，図⑬のように５回目に辺ＡＢではね返りますが，その次にいずれかの頂点にぶつかることはできません。点線の矢印は頂点Ｄにぶつかりますが，その前に頂点Ｃにぶつかってしまいます。

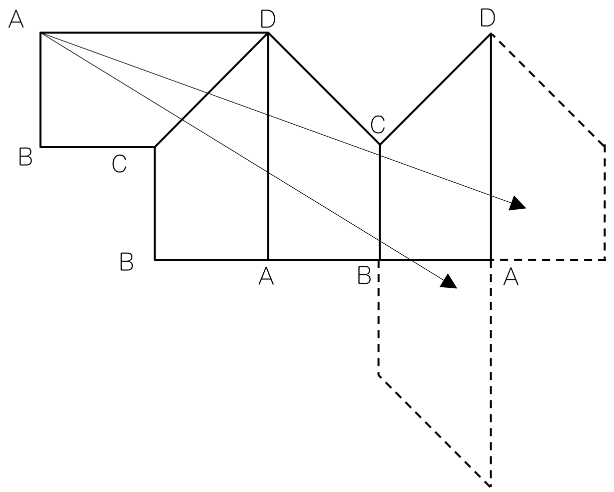
図⑬



３回目に辺ＢＣではね返る場合

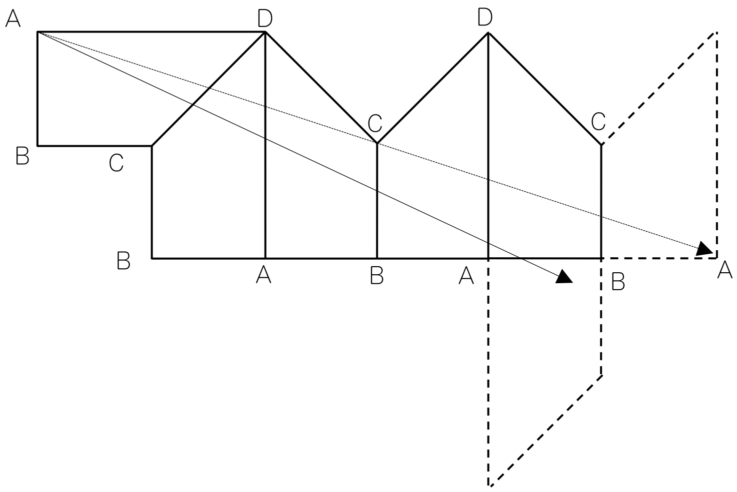
図⑭のように，４回目に辺ＡＤかＡＢではね返ります。

図⑭



４回目に辺ＡＤではね返った場合，図⑮のように５回目に辺ＢＣかＡＢではね返りますが，その次にいずれかの頂点にぶつかることはできません。点線の矢印は頂点Ａにぶつかりますが，その前に頂点Ｃにぶつかってしまいます。

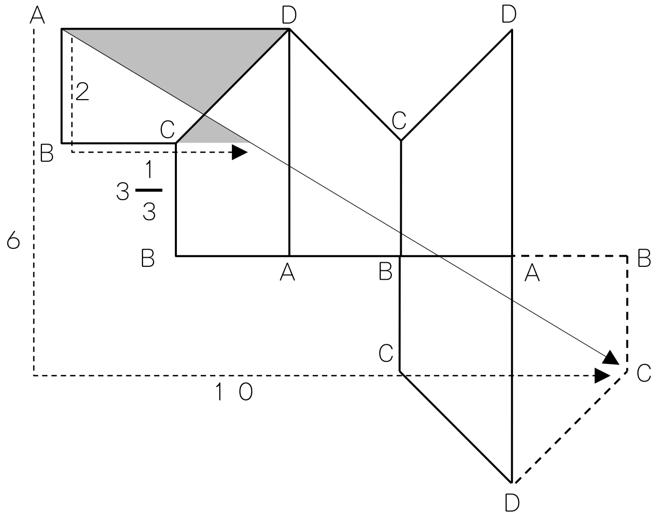
図⑮



最難関問題

４回目に辺ＡＢではね返った場合，図⑯のように５回目に辺ＡＤではね返って頂点Ｃにぶつかって止まることができます。このとき，実線の矢印は＜下に６，右に１０＞，つまりは＜下に２，右に$3\frac{1}{3}$＞進みます。よって，影をつけた三角形は４：（$3\frac{1}{3}$－２）＝３：１の相似ですから，球は頂点Ａから辺ＣＤ上の頂点Ｄから$\frac{3}{4}$の点に向けて発射されます。

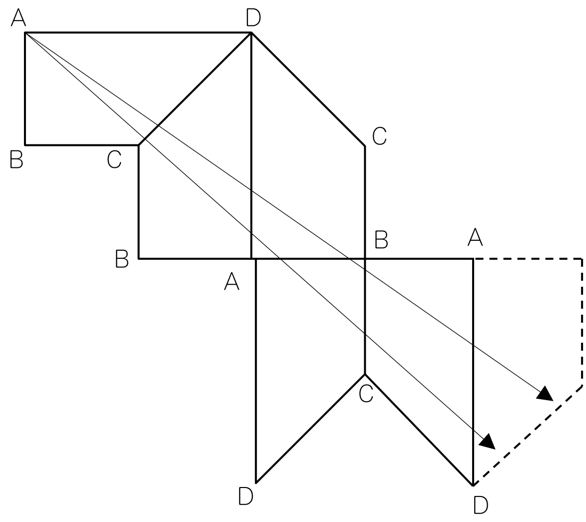
図⑯



３回目に辺ＡＢではね返る場合

図⑰のように，４回目に辺ＢＣ，５回目に辺ＡＤではね返りますが，次にいずれの頂点にもぶつかりません。

図⑰



以上より，辺ＣＤ上の頂点Ｄから$\frac{3}{4}$の点です。