

## 最難関問題

3 個の整数の公約数・公倍数・1

3 個の異なる整数を小さい順に  $A, B, C$  とします。 $A \times B \times C = 13824$  で、 $A, B, C$  の最小公倍数が  $144$  のとき、次の問いに答えなさい

- (1)  $A, B, C$  の最大公約数として考えられる整数をすべて答えなさい。
- (2)  $A, B, C$  にあてはまる整数の組をすべて答えなさい。解答らんはすべて使うとはかぎりません。

(1)			
(2)			
( , , )	( , , )	( , , )	( , , )
( , , )	( , , )	( , , )	( , , )
( , , )	( , , )	( , , )	( , , )
( , , )	( , , )	( , , )	( , , )



## 最難関問題

3個の整数の公約数・公倍数・1

(1) 2, 4

(2) (2, 48, 144), (6, 16, 144), (16, 18, 48), (4, 24, 144),  
 (8, 12, 144), (4, 48, 72), (8, 36, 48), (12, 16, 72),  
 (16, 24, 36)

(1) 図①のように, A, B, Cを最大公約数をG, 連除法でA, B, Cを最大公約数で割ってできるAとBの商の最大公約数をG<sub>1</sub>, AとCの商の最大公約数をG<sub>2</sub>, BとCの商の最大公約数をG<sub>3</sub>とします。AはG, G<sub>1</sub>, G<sub>2</sub>によって割られるので, 連除法の一番下の段においてAの真下に並ぶ数は,

$\frac{A}{G \times G_1 \times G_2}$ で, B, Cについても同様です。最小公倍数Lは

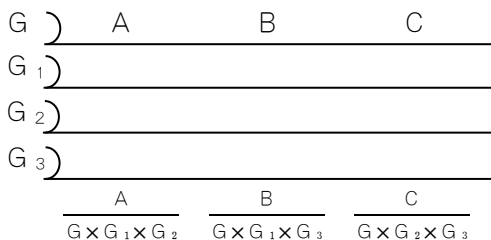
$G \times G_1 \times G_2 \times G_3 \times \frac{A}{G \times G_1 \times G_2} \times \frac{B}{G \times G_1 \times G_3} \times \frac{C}{G \times G_2 \times G_3}$ なので, この式を計算をすると,

$\frac{A \times B \times C}{G \times G \times G_1 \times G_2 \times G_3}$ となります。A × B × C = 13824,  $L = \frac{A \times B \times C}{G \times G \times G_1 \times G_2 \times G_3} = 144$ であ

ることから,  $G \times G \times G_1 \times G_2 \times G_3 = 13824 \div 144 = 96$ です。

G × Gは96の約数となるような平方数なので, 1 × 1 = 1, 2 × 2 = 4, 4 × 4 = 16のいずれかです。ここでそれぞれの場合のG<sub>1</sub> × G<sub>2</sub> × G<sub>3</sub>を求めると, 96 ÷ (1 × 1) = 96, 96 ÷ (2 × 2) = 24, 96 ÷ (4 × 4) = 6となります。G<sub>1</sub> × G<sub>2</sub> × G<sub>3</sub>は最小公倍数144の約数なので, 96は不適当です。よって, A, B, Cの最大公約数Gは2か4です。

図①





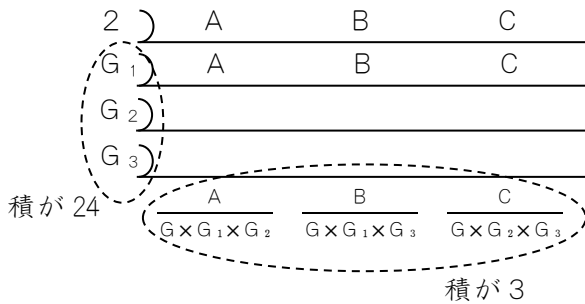
## 最難関問題

(2) 最大公約数  $G$  が 2 の場合と 4 の場合で分けて考えます。

### 最大公約数 $G = 2$ の場合

$G_1 \times G_2 \times G_3 = 96 \div (2 \times 2) = 24$  となり、連除法で表すと図②のようになります。最下段にならぶ 3 個の整数は互いに素で積が 3 であるため、 $(1, 1, 3)$  の並びかえとなります。また、 $G_1, G_2, G_3$  も互いに素です。よって、互いに素で積が 24 の以下の整数の組である、 $(1, 1, 24), (1, 3, 8)$  の並びかえとなります。

図②

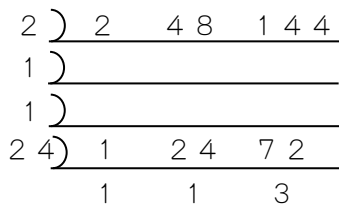


$(1, 1, 24)$  の場合、3 と 24 は互いに素ではないので、3 は 24 で割ってできる数です。図③のように、 $(A, B, C) = (2, 48, 144)$  です。

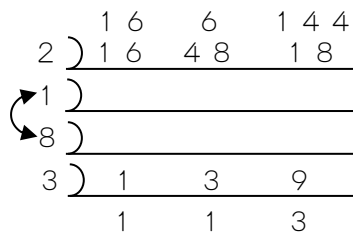
$(1, 3, 8)$  の場合、3 と 3 は互いに素ではないので、3 は 3 で割ってできる数です。図④のように 2 通りの場合が考えられるので、小さい順に並びかえて、

$(A, B, C) = (6, 16, 144), (16, 18, 48)$  です。

図③



図④



最難関問題

最大公約数  $G = 4$  の場合

$G_1 \times G_2 \times G_3 = 96 \div (4 \times 4) = 6$  となり、  
連除法で表すと図⑤のようになります。最下段に  
ならぶ3個の整数は互いに素で積が6であるため、  
(1, 1, 6) か (1, 2, 3) の並びかえとなり  
ます。また、 $G_1, G_2, G_3$  も互いに素ですか  
ら、同様に (1, 1, 6) か (1, 2, 3) の並  
びかえとなります。

最下段にならぶ3個の整数と  $G_1, G_2, G_3$  が (1, 1, 6)  
の並びかえの場合、6と6は互いに素ではないので、6は6で割  
ってできる数です。図⑥のように、

(A, B, C) = (4, 24, 144) です。

最下段にならぶ3個の整数が (1, 1, 6),  $G_1, G_2, G_3$  が  
(1, 2, 3) の並びかえの場合、6は2および3と互いに素で  
はないので、6は2と3で割ってできる数です。図⑦のように、

(A, B, C) = (8, 12, 144) です。

最下段にならぶ3個の整数が (1, 2, 3),  $G_1, G_2, G_3$  が (1, 1, 6) の並びかえの場合、  
2と3は6と互いに素ではないので、2と3は6で割ってできる数です。図⑧のように、

(A, B, C) = (4, 48, 72) です。

最下段にならぶ3個の整数と  $G_1, G_2, G_3$  が (1, 2, 3) の並びかえの場合、2は2で割ってで  
きる数、3は3で割ってできる数です。図⑨、⑩のように、小さい順に並びかえて、

(A, B, C) = (8, 36, 48), (12, 16, 72), (16, 24, 36) です。

図⑧

$$\begin{array}{r} 4 \ ) \ 4 \quad 48 \quad 72 \\ \hline 1 \ ) \quad \quad \quad \\ \hline 1 \ ) \quad \quad \quad \\ \hline 6 \ ) \ 1 \quad 12 \quad 18 \\ \hline \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array}$$

図⑨

$$\begin{array}{r} 4 \ ) \ 8 \quad 48 \quad 36 \\ \hline 1 \ ) \quad \quad \quad \\ \hline 2 \ ) \ 2 \quad 12 \quad 9 \\ \hline 3 \ ) \ 1 \quad 6 \quad 9 \\ \hline \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array}$$

図⑩

$$\begin{array}{r} \quad \quad 12 \quad 16 \quad 72 \\ 4 \ ) \ 24 \quad 16 \quad 36 \\ \hline 1 \ ) \quad \quad \quad \\ \hline \quad \quad 3 \quad 4 \quad 18 \\ 2 \ ) \ 6 \quad 4 \quad 9 \\ \hline 3 \ ) \ 3 \quad 2 \quad 9 \\ \hline \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array}$$

図⑤

$$\begin{array}{r} 4 \ ) \quad A \quad B \quad C \\ \hline G_1 \ ) \quad A \quad B \quad C \\ \hline G_2 \ ) \quad \quad \quad \\ \hline G_3 \ ) \quad \quad \quad \\ \hline \quad \quad \frac{A}{G \times G_1 \times G_2} \quad \frac{B}{G \times G_1 \times G_3} \quad \frac{C}{G \times G_2 \times G_3} \\ \hline \end{array}$$

積が6 (circled around the bottom row)

積が6 (circled around the bottom row)

図⑥

$$\begin{array}{r} 4 \ ) \ 4 \quad 24 \quad 144 \\ \hline 1 \ ) \quad \quad \quad \\ \hline 1 \ ) \quad \quad \quad \\ \hline 6 \ ) \ 1 \quad 6 \quad 36 \\ \hline \quad 1 \quad 1 \quad 6 \end{array}$$

図⑦

$$\begin{array}{r} 4 \ ) \ 8 \quad 12 \quad 144 \\ \hline 1 \ ) \quad \quad \quad \\ \hline 2 \ ) \ 2 \quad 3 \quad 36 \\ \hline 3 \ ) \ 1 \quad 3 \quad 18 \\ \hline \quad 1 \quad 1 \quad 6 \end{array}$$

以上より、(A, B, C) = (2, 48, 144), (6, 16, 144), (16, 18, 48),  
(4, 24, 144), (8, 12, 144), (4, 48, 72), (8, 36, 48),  
(12, 16, 72), (16, 24, 36) です。