

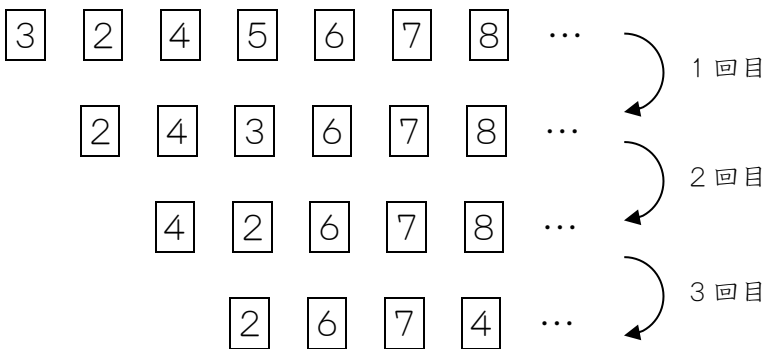
最難関問題

カードの置き換え（最難関）・2

整数の書かれたカードを一行に並べます。

3
2
4
5
6
7
8
...

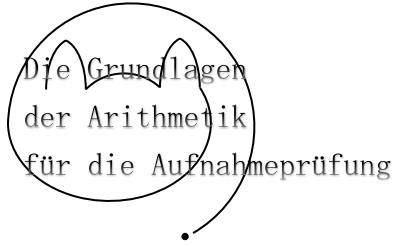
次に、一番左のカードを、書いてある数字の分だけ右に動かし、そこにあるカードと置き換えていきます。



3以上の整数が書かれたカードを小さい順に左から並べた場合について、次の問いに答えなさい。

3
4
5
6
7
8
9
10
...

- (1) カードを99回置き換えたとき、一番左にあるカードに書いてある整数を答えなさい。
- (2) カードを17回置き換えたとき、一番左にあるカードに書いてある整数を答えなさい。
- (3) カードを50回置き換えました。次のカードが一番左にきた回数を答えなさい。
 ① 4 ② 5 ③ 7 ④ 14 ⑤ 28 ⑥ 32
- (4) 一番左にくるカードに書かれた整数は、どのような整数ですか。かんたん簡単に説明しなさい。



最難関問題

カードの置き換え（最難関）・2

(1) 3 (2) 20 (3) ①2回 ②2回 ③2回 ④0回 ⑤1回 ⑥0回 (4) 解説参照

(1) ある程度調べてみます。

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
4	5	3	7	8	9	10	11	12	13	14	...	
5	3	7	4	9	10	11	12	13	14	...		
3	7	4	9	5	11	12	13	14	...			
7	4	3	5	11	12	13	14	...				

3の倍数のカードは例外なく3のカードによって置き換えられていきます。99回操作を行ったときに一番左にくるカードは、もしも置き換えが起こらなければ、 $99 + 3 = 102$ ですが、102は3の倍数なので、3に置き換えられています。よって、3のカードが一番左にきます。

(2) 同様に調べていくと、20です。

(3)

- ① 4は4と8の位置で一番左にきます。12の位置では、3に置き換えられるので、2回です。
- ② 5は5と10の位置で一番左にきます。15の位置では、3に置き換えられるので、2回です。
- ③ 7は7と14の位置で一番左にきます。21の位置では、3に置き換えられるので、2回です。
- ④ 14は7によって置き換えられるので、一番左にくることはありません。
- ⑤ 28に置き換わる可能性があるのは、28の3以上28未満の約数が書かれたカードですから、4、7、14のいずれかです。4は12、7は21の位置で3に置き換えられています。また、14は7に置き換えられているので、28は少なくとも1回一番左にきます。また、 $28 \times 2 = 56$ の位置は、 $50 + 3 = 53$ より大きいので、50回の操作では一番左にくることはありません。よって、1回です。
- ⑥ 32に置き換わる可能性があるのは、32の3以上32未満の約数が書かれたカードですから、4、8、16のいずれかです。4は12の位置で3に置き換えられています。8は4に置き換えられています。16の3以上16未満の約数は、4と8ですがどちらも16に置き換わることはありません。よって、16は一番左にきて、32に置き換わりますから、32が一番左にくることはありません。

最難関問題

(4) 3以上の整数であり、3自身を除けば3の倍数は一番左にこないことは明らかです。また、一番左にきたカードは、そのカードに書かれた整数を2倍した数のカードに置き換わります。よって、4は8に置き換わり、16は32に置き換わり、その16は48の位置で3に置き換えられるので、64は一番左にきてから128に置き換わります。

同様に、7は14に置き換わり、28は56に置き換わるので、112は一番左にきてから224に置き換わります。

整数の範囲の割り算において、8は2で3回、32は5回、128は7回、14は1回、224は3回割り切れます。こうして、2で奇数回割り切れる整数は一番左にくることがありません。よって、解答例は次のようになります。

「3か、3以上の整数で3の倍数ではなく2でちょうど0回か偶数回整数の範囲で割り切れる数。」