受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

線対称と回転対称性・２

　９０度以下の角度で交わる２本の直線㋐，㋑と，中心が㋐，㋑の交点と重ならないように円を１つかき，円の配置が直線㋐，㋑のどちらを対称の軸としても線対称になるように，できるだけ少ない円をかき足します。例えば，図１のように直線㋐，㋑が垂直に交わり，円の中心が直線㋐の上にある場合は，図２のように円を２個にすることでどちらの直線を対称の軸としても線対称になります。このとき，㋐と㋑の交点を中心として円を１８０度回転させると円はぴったりと重なりあうことから，円の配置は１８０度の回転対称性を持つ，といいます。

　図３のように円の中心が直線㋐から４５度傾いた直線上にある場合は，図４のように円を４個にすることでどちらの直線を対称の軸としても線対称になります。このとき，円の配置は９０度の回転対称性を持ちます。

図１

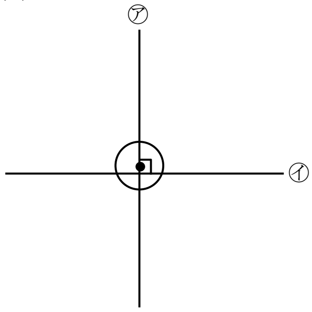


図２

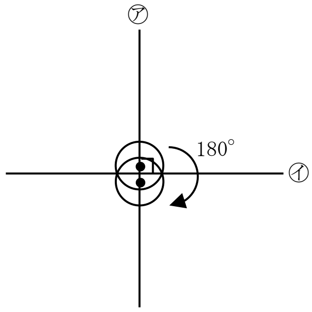


図３

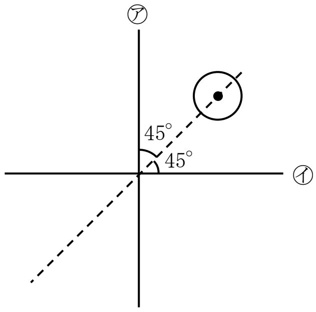
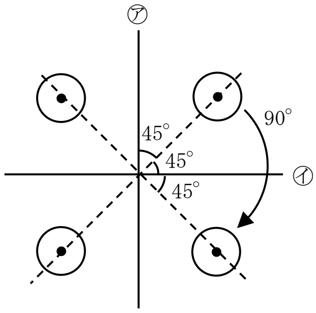


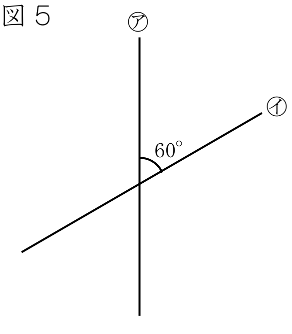
図４



　なお，図２の円の配置は１８０の倍数にあたる３６０度や５４０度回転させてもぴったりと重なりますが，回転対称性は最も小さい角度で答えるものとします。

（１）図５のように直線㋐，㋑が６０度で交わる場合，どちらの直線に対しても線対称になるように円をかき加えたときの円の配置の回転対称性と円の個数の組み合わせとして考えられるものをすべて答えなさい。解答らんはすべて使うとはかぎりません。

図５



回転対称性（度）	円の個数（個）

（２枚目に続きます）

最難関問題

（２）直線㋐，㋑のどちらに対しても線対称になるように円をかき加えたところ，円の配置の回転対称性は７２度になりました。直線㋐，㋑の交わる角度と円の個数の組み合わせとして考えられるものをすべて答えなさい。解答らんはすべて使うとはかぎりません。

２直線の交わり（度）	円の個数（個）

（３）直線㋐,㋑のどちらに対しても線対称になるように円をかき加えたところ,円が１４個になりました。直線㋐,㋑の交わる角度と円の配置の回転対称性の組み合わせとして考えられるものをすべて答えなさい。解答らんはすべて使うとはかぎりません。

２直線の交わり（度）	回転対称性（度）

受験算数の基礎

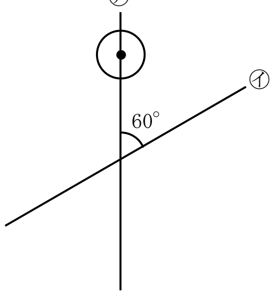
Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

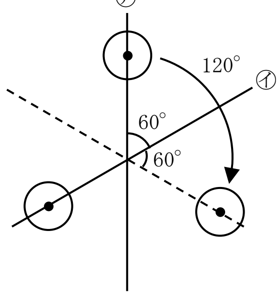
線対称と回転対称性・２　解答は各解説の末尾を参照してください

（１）図①のように中心が直線㋐（あるいは㋑）の上にくるように円をかくと，図②のようになって，回転対称性は１２０度で，円は３個です。図③のように中心が直線㋐から３０度傾いた直線の上にくるように円をかくと，図④のようになって，回転対称性は６０度で，円は６個です。

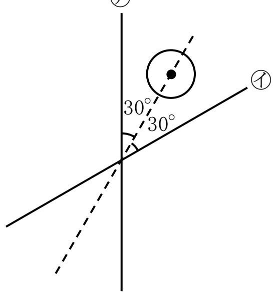
図①



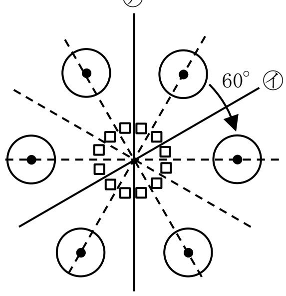
図②



図③



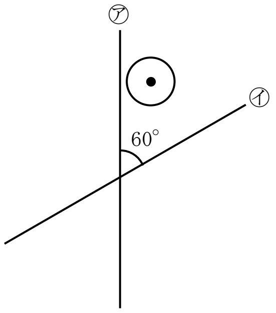
図④



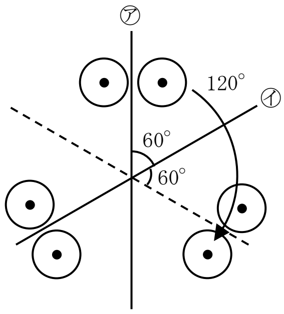
※□は３０度を表します

以上とは別のところに円を図⑤のようにかくと，図⑥のようになって，回転対称性は１２０度で，円は６個です。

図⑤



図⑥



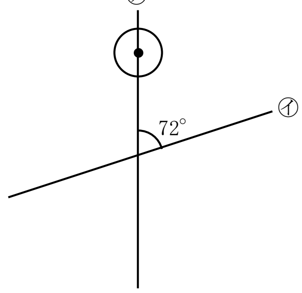
回転対称性（度）	円の個数（個）
６０	6
１２０	3
１２０	6

最難関問題

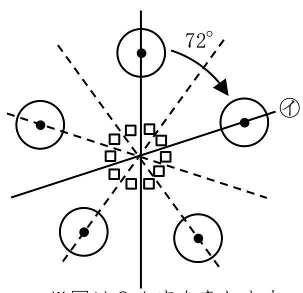
（２）（１）において，直線㋐，㋑の交わる角度が６０度のときに６０度と１２０度の回転対称性が生じました。このことから，回転対称性が７２度になる場合には，直線㋐，㋑の交わる角度が７２度のときと３６度のときを考えます。

直線㋐，㋑の交わる角度が７２度の場合，（１）と同様に円の位置は図⑦，⑨，⑪の３通りが考えられ，それぞれ図⑧，⑩，⑫のように，７２度の回転対称性になります。

図⑦

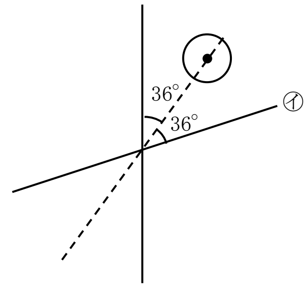


図⑧

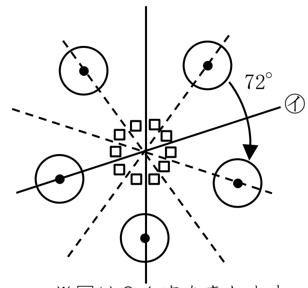


※□は３６度を表します

図⑨

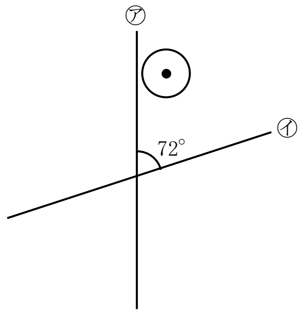


図⑩

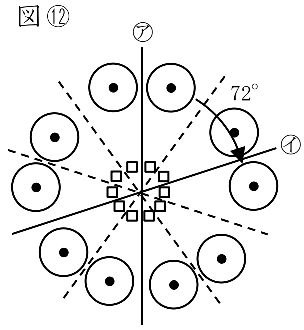


※□は３６度を表します

図⑪

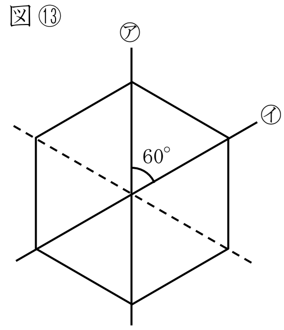


図⑫

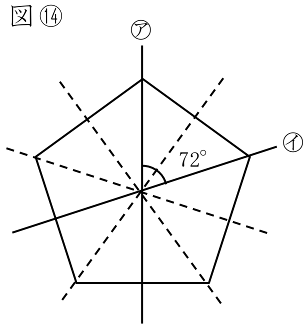


※□は３６度を表します

図⑬



図⑭



６０度のときと異なり，今回は７２×２＝１４４（度）の回転対称性になるものがありません。直線㋐，㋑の交わる角度が６０度の場合に㋐，㋑が対角線になるように正六角形を重ねると，図⑬のようになります。このとき，点線で示したもう１本の対角線を引いて直線を３本にすると，それらは直線㋐，㋑のどちらを軸としても線対称になります。よって，３６０÷３＝１２０（度）の回転対称性を持つことができます。この３本は正六角形の対称の軸６本のうち３本で，残りの３本は各辺の中点と中点を結ぶ直線です。このように，正六角形をはじめとする正偶数角形には対称の軸が２タイプあります。

それに対して，直線㋐，㋑の交わる角度が７２度の場合に㋐，㋑が対称の軸になるように正五角形を重ねると，図⑭のようになります。このときは，点線で示した３本の対称の軸を引いて５本の直線にすることで，直線㋐，㋑のどちらを軸としても線対称になります。正五角形をはじめとする正奇数角形には対称の軸が頂点と向かいあう辺の中点を結ぶタイプのものしかありません。こうして，３６０÷５＝７２（度）の回転対称性になります。

以上を踏まえて，直線㋐，㋑の交わる角度が３６度の場合を考えます。３６０÷３６＝１０より，正十角形を重ねることができるので，正偶数角形である正六角形を重ねることができる場合と同様に，（回転対称性，円の個数）＝（３６，１０），（７２，５），（７２，１０）の３通りになります。

よって，回転対称性が７２度になるのは，次の４通りです。

２直線の交わり（度）	円の個数（個）
７２	５
７２	１０
３６	５
３６	１０

（３）（２）より，直線㋐，㋑の交わる角度をｘ°とし，３６０÷ｘ＝ＮでＮが整数のとき，正Ｎ角形を重ねて考えると，次のようになります。

Ｎが偶数…（回転対称性，円の個数）＝（ｘ，Ｎ），（ｘ×２，Ｎ÷２），（ｘ×２，Ｎ）の３通り

Ｎが奇数…（回転対称性，円の個数）＝（ｘ，Ｎ），（ｘ，Ｎ×２）の２通り

それぞれの場合に分けて考えます。

$\boxed{（ｘ，Ｎ）＝（ｘ，１４）}$

Ｎ＝１４，ｘ＝３６０÷１４＝$\frac{180}{7}$（度）より，（２直線の交わり，回転対称性）＝（$\frac{180}{7}$，$\frac{180}{7}$）

$\boxed{（ｘ×２，Ｎ÷２）＝（ｘ，１４）}$

Ｎ＝１４×２＝２８，ｘ＝３６０÷２８＝$\frac{90}{7}$（度）より，

（２直線の交わり，回転対称性）＝（$\frac{90}{7}$，$\frac{180}{7}$）

$\boxed{（ｘ×２，Ｎ）＝（ｘ，１４）}$

Ｎ＝１４，ｘ＝３６０÷１４＝$\frac{180}{7}$（度）より，（２直線の交わり，回転対称性）＝（$\frac{180}{7}$，$\frac{360}{7}$）

$\boxed{（ｘ，Ｎ×２）＝（ｘ，１４）}$

Ｎ＝１４÷２＝７，ｘ＝３６０÷７＝$\frac{360}{7}$（度）より，

（２直線の交わり，回転対称性）＝（$\frac{360}{7}$，$\frac{360}{7}$）

以上より，答えは次のようになります。

２直線の交わり（度）	回転対称性（度）
$\frac{90}{7}$	$\frac{180}{7}$
$\frac{180}{7}$	$\frac{180}{7}$
$\frac{180}{7}$	$\frac{360}{7}$
$\frac{360}{7}$	$\frac{360}{7}$