

反射と衝突

図1の長方形ABCDにおいて、頂点Aから、辺BC上のBから $\frac{8}{23}$ の地点に向けて小さな円Pを、頂点Dから、辺BC上のCから $\frac{7}{23}$ の地点に向けて小さな円Qを同時に発射したところ、円Pは1秒後に辺BCに初めてぶつかりました。円は辺にぶつかると、図2のように入ってきたときと同じ角度ではね返り、頂点にぶつかると消えます。また、円と円はぶつかることなくすり抜けます。以下の問いに答えなさい。

図1

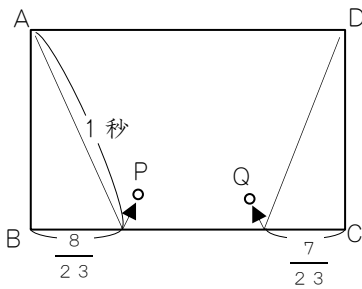
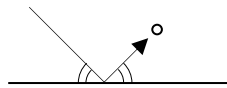
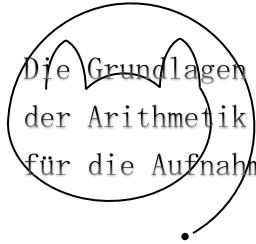


図2



- (1) 2つの円を発射してから1秒以内に、2つの円は1回目に重なりました。また、そのときまでに円Qは辺ABでは一度も反射していませんでした。2つの円が1回目に重なったのは発射してから何秒後ですか。また、円Qが初めて辺BCではね返ったのは、発射してから何秒後ですか。
- (2) 2つの円を発射してから最も早く2つの円が重なるのは何秒後ですか。また、その場合、円Qが初めて辺BCではね返ったのは、発射してから何秒後ですか。
- (3) 2つの円を発射してから最も遅く2つの円が重なるのは何秒後ですか。また、その場合、円Qが初めて辺BCではね返ったのは、発射してから何秒後ですか。



反射と衝突

(1) 重なり...0.6秒後, Qのはね返り... $\frac{3}{13}$ 秒後 (2) 重なり... $\frac{1}{15}$ 秒後, Qのはね返り... $\frac{1}{149}$ 秒後

(3) 重なり... $22\frac{13}{15}$ 秒後, Qのはね返り... $7\frac{14}{47}$ 秒後

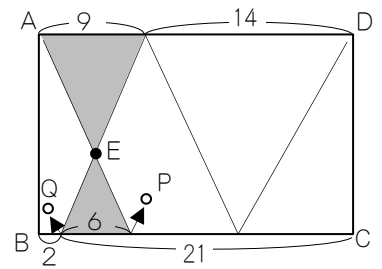
(1) 辺BCの長さを23cmとすると, 円Pは頂点Bから8cm, 円Qは頂点Cから7cmのところで初めてはね返ります。円Qは左方向に7cm進むごとに辺BCとADではね返るので, 図①のようにE地点で2つの円が重なる場合に問題の条件を満たします。影をつけた三角形は $9:6=3:2$ の相似なので, 重なるのは

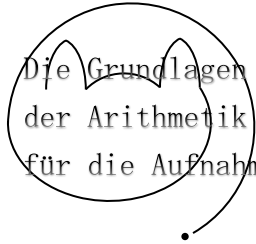
$$1 \times \frac{3}{3+2} = 0.6 \text{ (秒後) です。}$$

このとき, 円Qが辺ADとBCの間を進んだ回数は2.6回なので, 円Qが初めて辺BCではね返ったのは,

$$0.6 \div 2.6 = \frac{3}{13} \text{ (秒後) です。}$$

図①



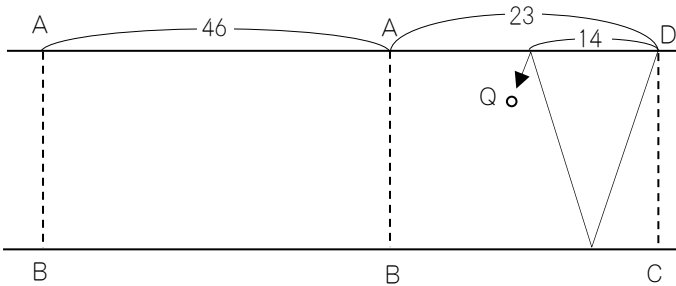


最難関問題

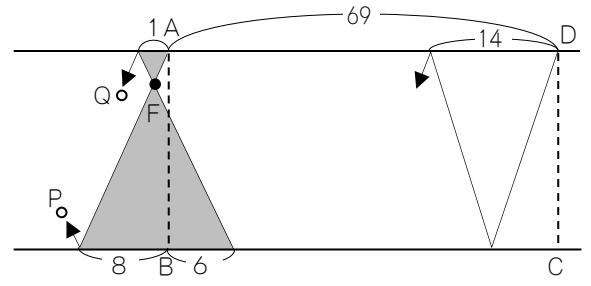
(2) 図②のように長方形A B C Dを左側にのばして考えます。頂点AはDから左に向けて

(23 × 奇数) cm進むたびに現れます。また、円Qは左方向にcmの単位で14の倍数進むたびに辺ADではね返ります。そして、7と23の最小公倍数にあたる7 × 23 = 161 (cm) 進んだところで、頂点Bにぶつかって停止します。161以下の14の倍数のうちで、23 × 奇数にできるだけ近いものを探すと、69との差が1である14 × 5 = 70が見つかります。円Pは頂点Aから頂点CやDの方向に向けてすすむので、図③のように左に向けて発射されていると考えても問題ありません。よって、2つの円の重なりがF地点で起こると考えると、重なりはもっとも早くなります。

図②



図③



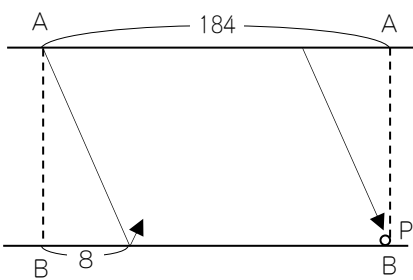
図③の影をつけた三角形は $1 : (8 + 6) = 1 : 14$ の相似なので、重なるのは

$$1 \times \frac{1}{1 + 14} = \frac{1}{15} \text{ (秒後) です。このとき、円Qが辺ADとBCの間を進んだ回数は } 9 \frac{14}{15} \text{ 回なの}$$

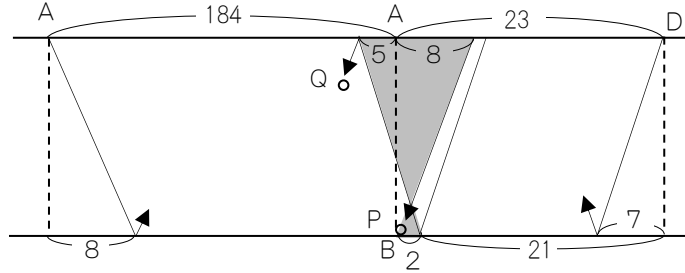
で、円Qが初めて辺BCではね返ったのは、 $\frac{1}{15} \div 9 \frac{14}{15} = \frac{1}{149}$ (秒後) です。

(3) 円Pは右方向にcmの単位で8の倍数進むたびに辺BCかADではね返ります。そして、8と23の最小公倍数にあたる $8 \times 23 = 184$ (cm) 進んだところで、図④のように頂点Bにぶつかって停止します。よって、この直前に円Qと重なる場合を考えます。円Qは左方向に $(7 \times \text{奇数})$ cm進むたびに辺BCではね返り、 $(23 \times \text{奇数})$ cm進むたびに辺CDではね返ります。161以下の $23 \times \text{奇数}$ のうちで、 $7 \times \text{奇数}$ にできるだけ近いものを探すと、 $7 \times 3 = 21$ との差が2である $23 \times 1 = 23$ や、 $7 \times 17 = 119$ との差が4である $23 \times 5 = 115$ が見つかります。図⑤、⑥を比べると、明らかに図⑤の場合のほうが重なりが遅くなります。

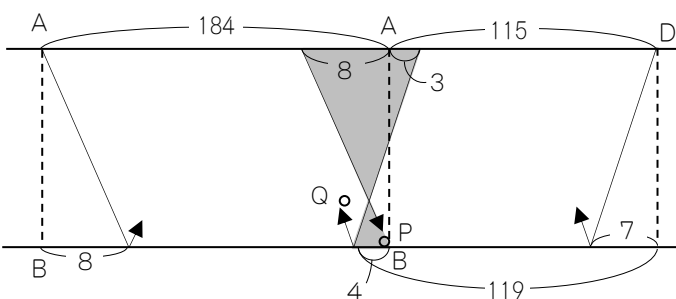
図④



図⑤



図⑥



図⑤の影をつけた三角形は $(5 + 8) : 2 = 13 : 2$ の相似なので、重なるのは

$22 + 1 \times \frac{13}{13 + 2} = 22 \frac{13}{15}$ (秒後) です。このとき、円Qが辺ADとBCの間を進んだ回数は

$3 \frac{2}{15}$ 回なので、円Qが初めて辺BCではね返ったのは、 $22 \frac{13}{15} \div 3 \frac{2}{15} = 7 \frac{14}{47}$ (秒後) です。