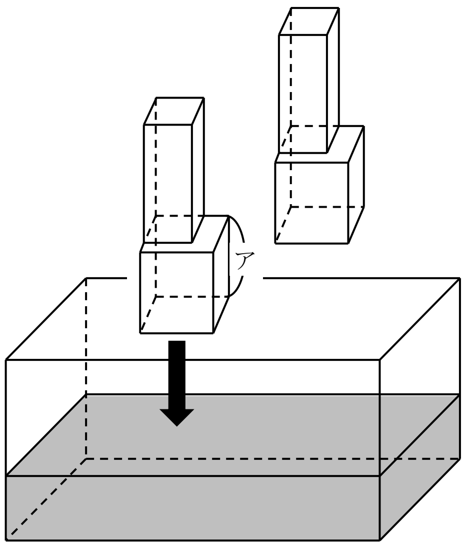
# 最難関問題

棒沈めの問題・複合立体

図のように，直方体の形をした水そうに水が入っています。この水そうに，水そうよりも背の高いおもりを次々と水そうの底までまっすぐに沈めていきます。おもりは２つの直方体を組み合わせた形をしており，下の直方体と上の直方体の底面積の比は２：１です。




１個目のおもりを沈めたところ，水面は$\frac{10}{11}$cm高くなりました。２個目のおもりを沈めたところ，水面は１cm高くなり，おもりの下の部分よりも水面のほうが高くなりました。３個目のおもりを沈めたところ，水面は$\frac{12}{11}$cm高くなりました。４個目のおもりを沈めたところ，水面は１.２cm高くなりました。最後まで水がこぼれることはありませんでした。

このとき，水そうの底面積はおもりの下の部分の底面積の$\boxed{\text{あ}}$倍です。おもりを沈める前の水面の高さは$\boxed{\text{い}}$cmで，おもりの下の部分の高さ（アの長さ）は$\boxed{\text{う}}$cmです。$\boxed{\text{あ}}$～$\boxed{\text{う}}$にあてはまる数を答えなさい。

# 最難関問題

棒沈めの問題・複合立体　$\boxed{\text{あ}}$…１２，$\boxed{\text{い}}$…１０，$\boxed{\text{う}}$…１１

　例えば，図１のように左に寄せた面積図で整理をしてみます。おもりの下の部分の底面積を２，上の部分の底面積を１として，（底面積×高さ）によって体積を決めると，図２のようになります。

図１

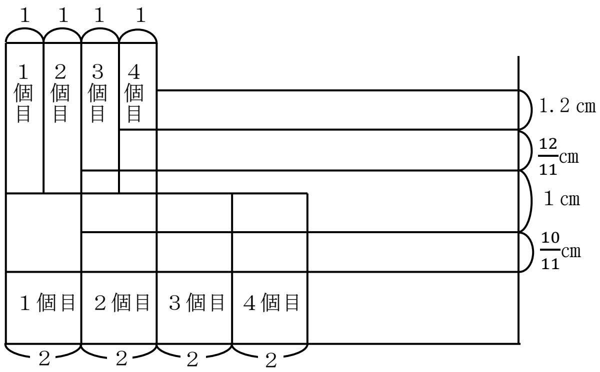
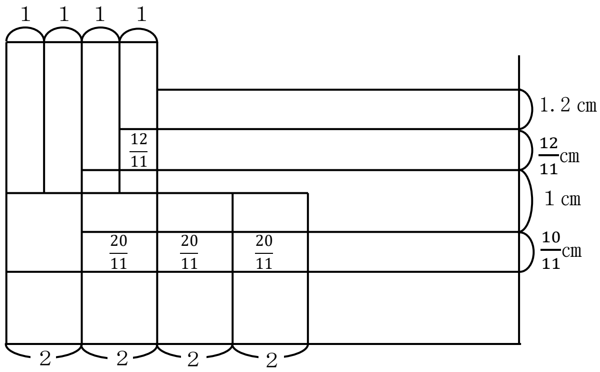



図２




　まず，３個目と４個目のおもりをまとめて沈めた場合と，４個目のおもりのみを沈めた場合を比べます。３個目と４個目のおもりをまとめて沈めた場合，図３において影をつけた部分にあった水がおしのけられて斜線部分に移ると考えられます。４個目のおもりのみを沈めた場合，図４において影をつけた部分にあった水がおしのけられて斜線部分に移ると考えられます。

図３

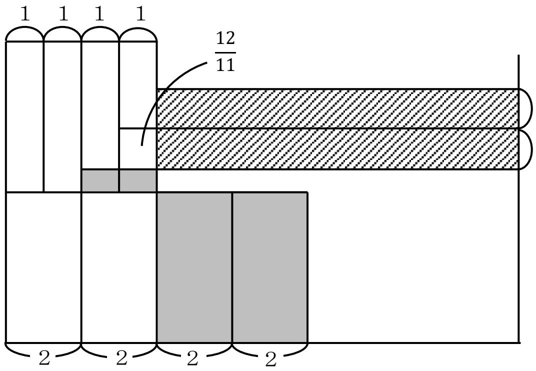
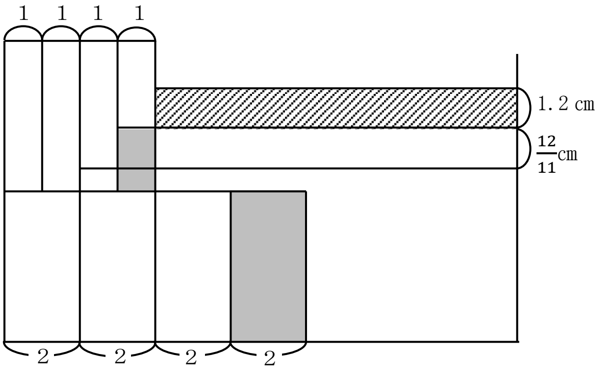



図４

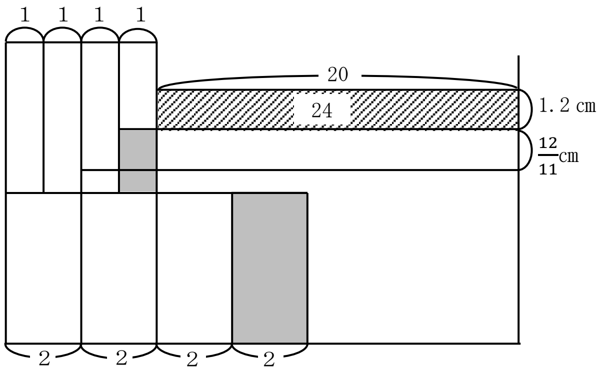



$\frac{１２}{１１}$：1.2＝１０：１１より，図３と図４でおしのけられた水の体積の比は（１０＋１１）：１１＝２１：１１です。また，図３の影をつけた部分のうち，４個目のおもりに当たる部分は比の２１÷２＝１０.5にあたりますから，図４の影をつけた部分との体積の比は１０.５：１１＝２１：２２です。比の差の２２－２１＝１が体積の$\frac{１２}{１１}$にあたるので，比の２２は$\frac{１２}{１１}$×２２＝２４です。

# 最難関問題

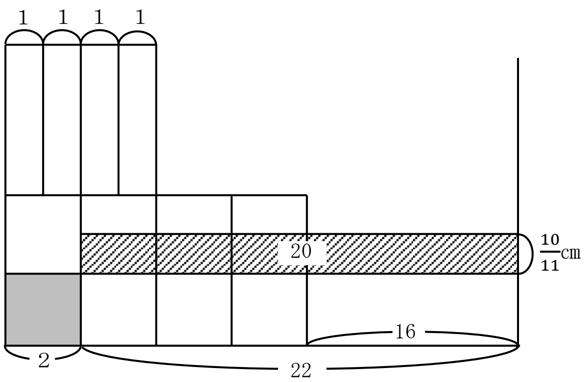
４個目のおもりのみを沈めたときにおしのけられた水の体積は２４ですから，図５のようにその底面積は２４÷１.２＝２０となります。よって，水そうの底面積は２０＋２×２＝２４であり，おもりの下の部分の底面積の，２４÷２＝１２（倍）です。

図５




次に，１個目のおもりを沈めた場合を考えます。図６のように１個目のおもりによっておしのけられた水の体積は２２×$\frac{１０}{１１}$＝２０ですから，影をつけた部分の体積も２０となります。影をつけた部分の高さはおもりを沈める前の水面の高さですから，２０÷２＝１０（cm）です。

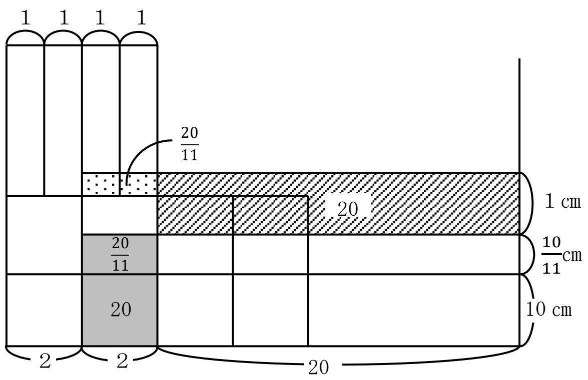
図６



# 最難関問題

最後に，２個目のおもりを沈めた場合を考えます。図７の影をつけた部分の水が押しのけられて，斜線部分とあみ目部分に移ります。影の部分の体積は，$2\times10+2\times\frac{10}{11}=20+\frac{20}{11}$です。また，斜線部分の体積は２０×１＝２０ですから，あみ目部分の体積は$20+\frac{20}{11}-20=\frac{20}{11}$です。

図７




あみ目部分の底面積は１＋１＝２ですから，$\frac{20}{11}\div2=\frac{10}{11}$（cm）があみ目部分の高さです。よって，おもりの下の部分の高さは，$10+\frac{10}{11}+1-\frac{10}{11}=11$（cm）です。