最難関問題

連続する整数への和分解と２０２６

整数を連続する整数の和の形に分解します。例えば３０は，

９＋１０＋１１，６＋７＋８＋９，４＋５＋６＋７＋８

の３通りに分解できます。

また，２０２６は，

５０５＋５０６＋５０７＋５０８

の１通りに分解できます。

１５０以下の整数のうちで，２０２６と同じように

○素数ではない

○分解が１通りのみで，偶数個の整数の和に分解される

ような数は，何個ありますか。

最難関問題

連続する整数への和分解と２０２６　２８個

３０を例に連続する整数への和分解を説明すると，次のようになります。３０の約数のうちで１以外の奇数約数は３，５，１５で，これらに連続する整数への和分解が対応しています。

３０＝１０×３より，平均値１０の３つの整数で，９＋１０＋１１

３０＝６×５より，平均値６の５つの整数で，４＋５＋６＋７＋８

３０＝２×１５＝7.5×４より，平均値7.5の４つの整数で，６＋７＋８＋９

２０２６の場合,素因数分解をすると２０２６＝２×１０１３となるので１以外の奇数約数は１０１３のみです。

２０２６＝２×１０１３＝５０６.5×４より，平均値５０６.5の４つの整数で，

５０５＋５０６＋５０７＋５０８

よって，偶数かつ奇数約数が１個しかない整数，つまりは，素因数分解をすると，２以外の奇数ｐについて，２×…×２×ｐとなる整数が条件を満たしていそうです。ここで，１２と４４を例に考えます。

１２＝４×３で，１２＝３＋４＋５という奇数個の整数の和

４４＝４×１１＝5.5×８で，４４＝２＋３＋４＋５＋６＋７＋８＋９という偶数個の整数の和

４×３の場合は４を平均とした３個の整数に分解できますが,４×１１で４を平均とした１１個の整数に分解することはできません。４を平均とした分解の最多個数は，４×２－１＝７（個）です。よって，素因数分解した２×…×２×ｐにおいて，ｐが（２×…×２）×２－１よりも大きい素数であれば，偶数個の分解になります。なお，２以外の素数ｐは奇数であり，（２×…×２）×２－１も奇数なので，ｐが（２×…×２）×２－１よりも大きいという事は，ｐが（２×…×２）×２よりも大きいという事です。この条件を満たすのは，

２×（５，７，１１，１３，１７，１９，２３，２９，３１，３７，４１，４３，４７，５３，５９，６１，６７，７１，７３）…１９個

２×２×（１１，１３，１７，１９，２３，２９，３１，３７）…８個

２×２×２×（１７）…１個

なので，１９＋８＋１＝２８（個）です。