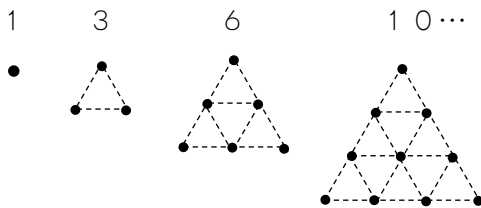


最難関問題

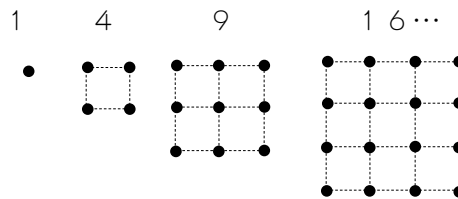
三角数 = 四角数

下の図のように、ご石を正三角形状に並べていったときのご石の個数にあたる整数を三角数、正方形状では四角数といいます。

<三角数>



<四角数>



三角数でも四角数でもある整数のうち、最小の整数は1、2番目に小さい整数は36です。3番目と4番目に小さい整数を答えなさい。以下の対話文を参考にしても構いませんが、気にせずに答えても構いません。

先生「 n 番目の三角数は $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = (1 + n) \times n \div 2$ 、
 m 番目の四角数は $m \times m$ と表せます。」

太郎「それじゃあ、 $m \times m = (1 + n) \times n \div 2$ となるような m と n を見つければいいんだ。」

先生「 $\div 2$ があると考えにくいので、 $2 \times m \times m = (1 + n) \times n$ という式で考えてみましょう。」

たとえば $m = 30$ だと、どうなりますか。」

太郎「30を素因数分解すると、 $2 \times 3 \times 5$ だから、

$2 \times m \times m = 2 \times (2 \times 3 \times 5) \times (2 \times 3 \times 5)$ だね。」

先生「 $(1 + n) \times n$ という式は、 $(1 + n)$ と n という、2つの連続する整数の積を表しています。」

太郎「ということは、 $2 \times (2 \times 3 \times 5) \times (2 \times 3 \times 5)$ を2つの連続する整数に分ければいいのか…。」

たとえば $2 \times 2 \times 2 \times 5$ と $3 \times 3 \times 5$ だと、計算をして40と45だからうまくいかないや。」

先生「計算？ 計算をしなくても $2 \times 2 \times 2 \times 5$ と $3 \times 3 \times 5$ という式を見れば、

連続する整数にならないことはわかるでしょう。もちろん、頭の中でぱっと暗算をするというのもしです。」

太郎「あ、そうか、

(こうして対話は続き、太郎くんは無事答えにたどり着くことができました)

最難関問題

三角数=四角数 3番目…1 2 2 5, 4番目…4 1 6 1 6

対話文に続けて考えていきます。 $2 \times 2 \times 2 \times 5$ と $3 \times 3 \times 5$ が連続する整数にならないのは、どちらも素因数として5を持つからです。連続する整数がどちらも5の倍数ということはありません。このことは、他の素数についても言えます。よって、 $2 \times (2 \times 3 \times 5) \times (2 \times 3 \times 5)$ であれば、 $(2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3)$ と (5×5) のように、 $(2 \times \text{平方数})$ と (奇数の平方数) の積だけを検証すればよいことになります。

そこで、奇数の平方数を順に考えていき、それに連続する整数が $2 \times \text{平方数}$ になっているかを調べます。

1×1のとき

$1 \times 1 = 1$ について、 $1 \times 2 = 1 \times (2 \times 1)$ が条件を満たします。

$1 \times (2 \times 1) = 2 \times m \times m$ なので、 $m \times m = 1$ です。1は問題文で取り上げた、三角数でも四角数でもある最小の整数です。

3×3のとき

$3 \times 3 = 9$ について、 $8 \times 9 = (2 \times 4) \times 9$ が条件を満たします。 $m \times m = 4 \times 9 = 36$ が、2番目の三角数でも四角数でもある整数です。

7×7のとき

$7 \times 7 = 49$ について、 $49 \times 50 = 49 \times (2 \times 25)$ が条件を満たします。

$m \times m = 49 \times 25 = 1225$ が、3番目の三角数でも四角数でもある整数です。

17×17のとき

$17 \times 17 = 289$ について、 $288 \times 289 = (2 \times 144) \times 289$ が条件を満たします。

$m \times m = 144 \times 289 = 41616$ が、4番目の三角数でも四角数でもある整数です。