受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

複合立体の等積変形

１辺の長さが６㎝の立方体ＡＢＣＤ―ＥＦＧＨの面ＣＧＨＤ上に，たて３㎝・横２㎝の長方形ＩＪＫＬがあり，辺ＩＪは辺ＣＧと平行，辺ＪＫは辺ＧＨと平行です。正方形ＥＦＧＨ，長方形ＩＪＫＬと，四角形ＪＧＨＫ，ＬＥＦＩ，三角形ＩＦＪ，ＪＦＧ，ＫＥＨ，ＬＥＫを面とする立体をＸとします。例えば，長方形ＩＪＫＬが図１の位置にある場合，三角形ＫＥＨとＬＥＫは１つの平面となるので，立体Ｘは図２のようになります。

図１

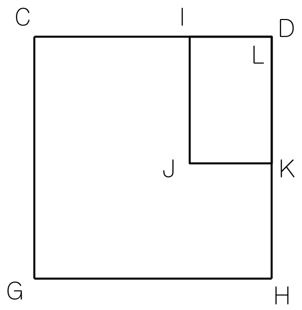


図２

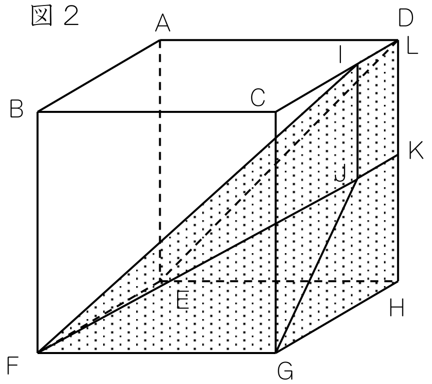
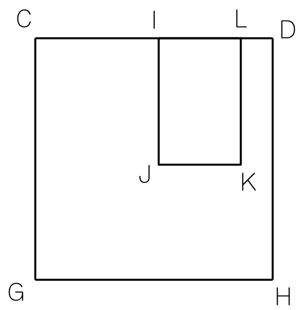


図３



（１）図２の立体Ｘの体積は何㎝^{3}ですか。

（２）長方形ＩＪＫＬの辺ＩＬが図３のように辺ＣＤと重なっていて，ＣＩの長さが３㎝のとき，立体Ｘの体積は何㎝^{3}ですか。

（３）立体Ｘの体積が５０㎝^{3}のとき，長方形ＩＪＫＬの位置として考えられる範囲を，【解答らん】に斜線で示しなさい。

【解答らん】

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

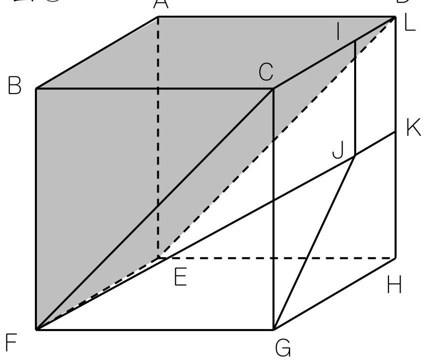
最難関問題

複合立体の等積変形　（１）７２㎤　（２）７２㎤　（３）解説参照

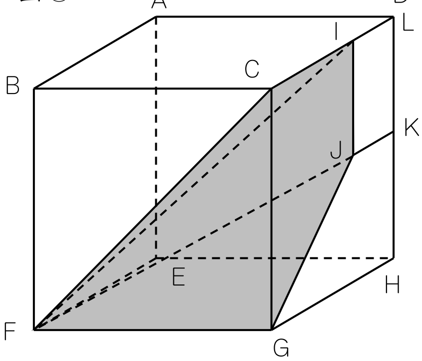
（１）立方体ＡＢＣＤ―ＥＦＧＨの体積である２１６㎤から，「立体Ｘ以外の部分」の体積を除いて考えます。「立体Ｘ以外の部分」は，図①，②の２つの部分に分けることができます。図①の立体は立方体ＡＢＣＤ―ＥＦＧＨの半分の体積なので，１０８㎤です。図②の立体は，四角形ＣＧＪＩを底面とする四角すいなので，$(3+6)\times 4\times\frac{1}{2}\times 6\times\frac{1}{3}=36$㎤です。

よって，立体Ｘの体積は，２１６－（１０８＋３６）＝７２（㎤）です。

図①



図②

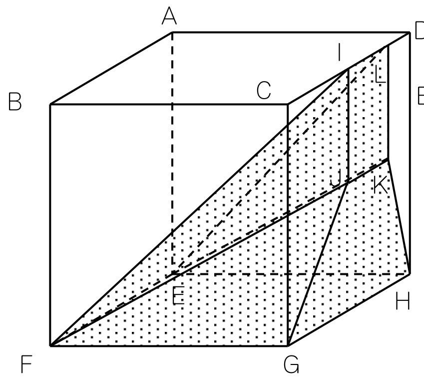


最難関問題

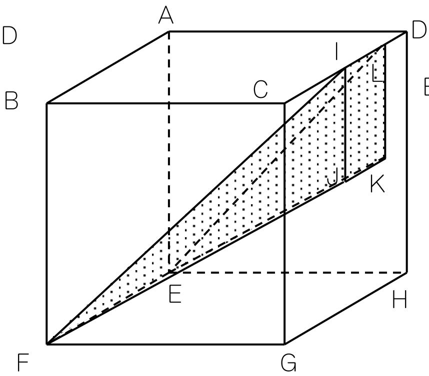
（２）立体Ｘは図③のようになります。今度は，立体Ｘを図④の立体Ｙと図⑥の立体Ｚに分けて考えます。立体Ｙは図⑤の斜線で示した三角形を底面とみると，ＥＦとＬＩとＫＪの３つの辺が高さにあたる，切断した三角柱の形をしているので，（底面積）×（高さの平均）によって体積を求めることができます。

よって，$3 \times 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{2 \times 2 + 6}{3} = 30$（$cm^3$）です。

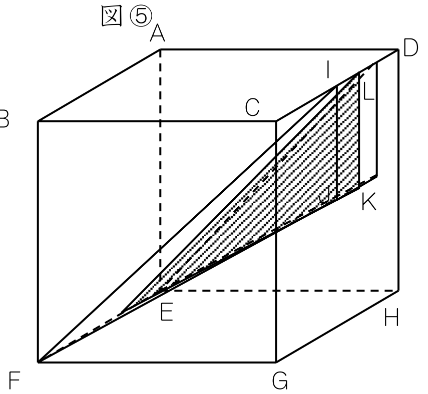
図③



図④

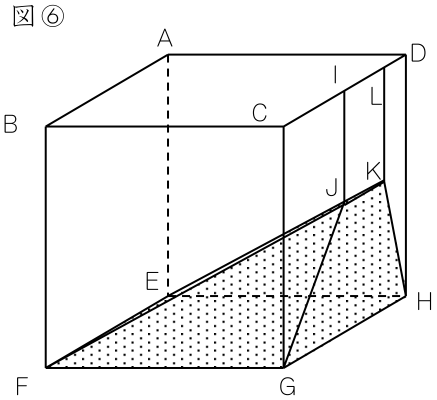


図⑤

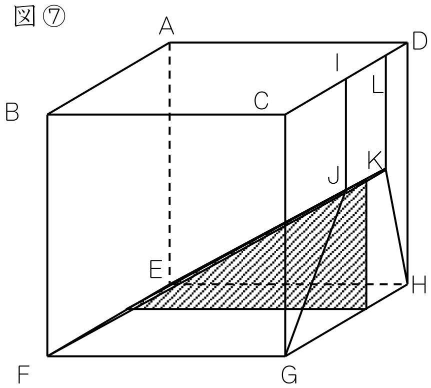


立体Ｚも，立体Ｙ同様に，図⑦の斜線で示した三角形を底面とした，切断した三角柱の形をしているので，$6 \times 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{6 \times 2 + 2}{3} = 42$（$cm^3$）です。

図⑥



図⑦

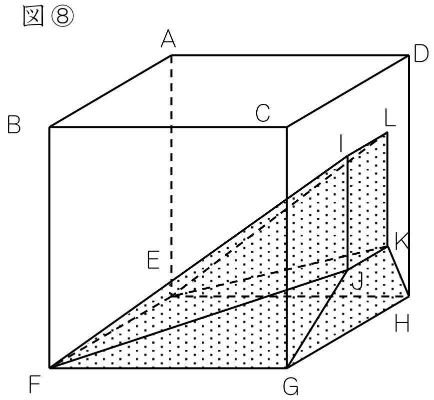


したがって，立体Ｘの体積は，３０＋４２＝７２（cm^3）です。

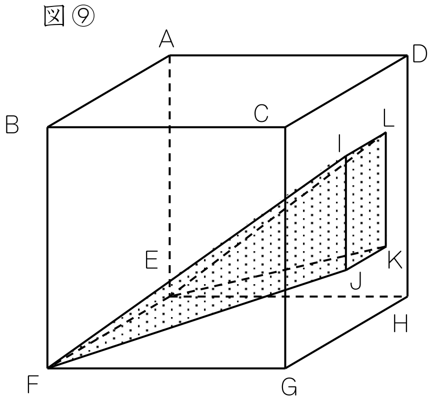
最難関問題

（３）（１）と（２）では立体Ｘの体積が等しくなりました。（２）の答えを出す過程を考えてみればそれは明らかです。図⑧において，一般的な立体Ｘについて考えてみます。図⑨の立体Ｙは，図⑩の斜線で示した三角形を底面とする切断した三角柱です。斜線で示した三角形の面積は必ず$3\times6\times\frac{1}{2}=9$（㎠）になり，高さの平均は$\frac{2\times2+6}{3}=\frac{10}{3}$（㎝）になるので，長方形ＩＪＫＬの位置にかかわらず，立体Ｙの体積は$9\times\frac{10}{3}=30$（㎤）です。

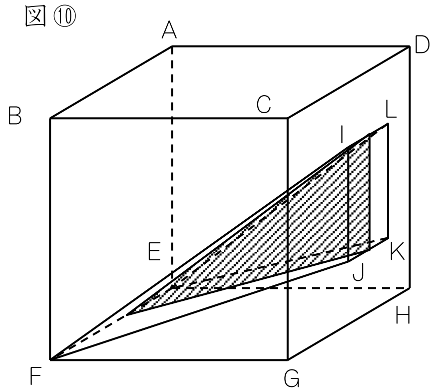
図⑧



図⑨

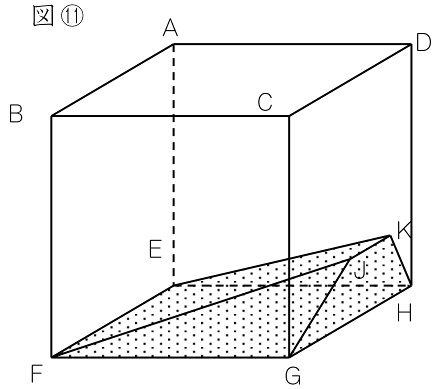


図⑩

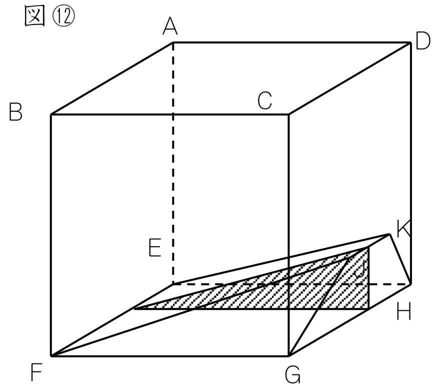


図⑪の立体Ｚは，図⑫の斜線で示した三角形を底面とする切断した三角柱です。斜線で示した三角形の底辺は６㎝ですが，高さは面ＣＧＨＤにおける長方形ＩＪＫＬの高さに応じて変わります。（１）（２）では高さが等しくなっています。また，切断した三角柱の高さの平均は，$\frac{6\times2+2}{3}=\frac{14}{3}$（㎝）で一定です。こうして，（１）と（２）では立体Ｘの体積が等しくなったわけです。

図⑪



図⑫



最難関問題

図⑫の斜線の三角形の高さを□㎝とすると，立体Ｚの体積は，６×□×$\frac{1}{2}$×$\frac{14}{3}$＝□×１４（cm^3）です。これに立体Ｙの体積を加えることで，立体Ｘの体積は，□×１４＋３０（cm^3）となります。□×１４＋３０＝５０より，□＝$1\frac{3}{7}$（㎝）なので，長方形ＩＪＫＬの位置として考えられる範囲は，下の図のようになります。

【解答】