

最難関問題

累乗数と素数の剰余

$\langle \square, \triangle \rangle$ で、 \square を \triangle 個かけあわせた数を表します。

例えば、 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ なので、 $\langle 2, 4 \rangle = 16$ です。

次の問いに答えなさい。

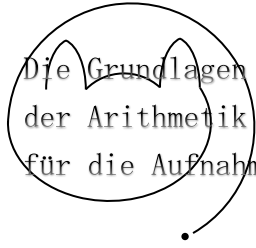
(1) $\langle 2, 6 \rangle$ 、 $\langle 2, 33 \rangle$ を 11 で割ったときの余りを答えなさい。

(2) $\langle 2, \triangle \rangle + \langle 9, \triangle \rangle$ が 11 の倍数となるような \triangle にあてはまる 100 以下の整数は何個ありますか。

(3) $\langle 20, 6 \rangle$ 、 $\langle 20, 33 \rangle$ を 11 で割ったときの余りを答えなさい。

(4) $\langle \square, 7 \rangle + \langle \bigcirc, 7 \rangle$ が 11 の倍数となるような (\square, \bigcirc) にあてはまる 100 以下の整数の組は何組ありますか。ただし、 $\square < \bigcirc$ とします。

(5) $\langle \square, \triangle \rangle + \langle \bigcirc, \triangle \rangle$ が 11 の倍数となるような $(\square, \bigcirc, \triangle)$ にあてはまる 100 以下の整数の組は何組ありますか。ただし、 $\square < \bigcirc$ とします。



最難関問題

累乗数と素数の剰余 (1) 9, 8 (2) 50個 (3) 9, 3 (4) 450組 (5) 40860組

(1) 2を順にかけ合わせてできる数2, 4, 8, 16, ...を11で割った余りは,

2,

$$2 \times 2 = 4,$$

$$4 \times 2 = 8,$$

$8 \times 2 = 16$ は11以上の数なので11で割った余りを求めて, $16 \div 11 = 1$ 余り5より5,

$$5 \times 2 = 10,$$

$$10 \times 2 = 20, 20 \div 11 = 1$$
余り9より9,

$$9 \times 2 = 18, 18 \div 11 = 1$$
余り7より7,

$$7 \times 2 = 14, 14 \div 11 = 1$$
余り3より3,

$$3 \times 2 = 6,$$

$$6 \times 2 = 12, 12 \div 11 = 1$$
余り1より1,

$1 \times 2 = 2$, となるので, 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6, 1, のくり返しになります。

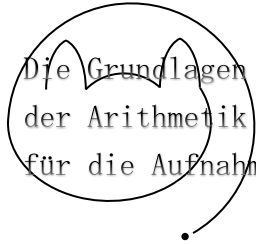
よって, $\langle 2, 6 \rangle$ を11で割った余りは9,

$\langle 2, 33 \rangle$ を11で割った余りは, $33 \div 10 = 3$ 余り3より周期内の3番目で8です。

(2) (1)と同様にして $\langle 9, \Delta \rangle$ を11で割った余りの周期を求めると, 9, 4, 3, 5, 1, のくり返しになります。 $\langle 2, \Delta \rangle$ を11で割った余りと並べると, 10個の数の周期になって, かげをつけた1, 3, 5, 7, 9番目の和が11となるので, $\langle 2, \Delta \rangle + \langle 9, \Delta \rangle$ が11の倍数になります。

$\langle 2, \Delta \rangle$	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
$\langle 9, \Delta \rangle$	9	4	3	5	1	9	4	3	5	1

よって, Δ にあてはまる100以下の整数は100以下の奇数なので, $100 \div 50$ (個) です。



最難関問題

- (3) $\langle 20, \Delta \rangle$ を 11 で割った余りの周期を求めると, $\boxed{9, 4, 3, 5, 1}$, のくり返しになります。
 これは, $\langle 9, \Delta \rangle$ を 11 で割った余りの周期と完全に一致します。それは次の理由によります。
 ある数 \square に 9 をかけた数は $\square \times 9$ で,
 ある数 \square に 20 をかけた数は $\square \times 20 = \square \times (11 + 9) = \square \times 11 + \square \times 9$ です。 $\square \times 11$ は 11 の倍数なので, $\square \times 9$ と $\square \times 20$ を 11 で割った余りは等しくなります。
 よって, $\langle 20, 6 \rangle$ を 11 で割った余りは 9, $\langle 20, 33 \rangle$ を 11 で割った余りは 3 です。
- (4) 以上より, $\langle \square, \Delta \rangle$ を 11 で割った余りは, 以下の表を右および下に繰り返していったものになります。

Δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\langle 1, \Delta \rangle$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\langle 2, \Delta \rangle$	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
$\langle 3, \Delta \rangle$	3	9	5	4	1	3	9	5	4	1
$\langle 4, \Delta \rangle$	4	5	9	3	1	4	5	9	3	1
$\langle 5, \Delta \rangle$	5	3	4	9	1	5	3	4	9	1
$\langle 6, \Delta \rangle$	6	3	7	9	10	5	8	4	2	1
$\langle 7, \Delta \rangle$	7	5	2	3	10	4	6	9	8	1
$\langle 8, \Delta \rangle$	8	9	6	4	10	3	2	5	7	1
$\langle 9, \Delta \rangle$	9	4	3	5	1	9	4	3	5	1
$\langle 10, \Delta \rangle$	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1
$\langle 11, \Delta \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$\langle \square, 7 \rangle + \langle \circ, 7 \rangle$ が 11 の倍数となるのは, (\square, \circ) が $(2, 9), (3, 8), (4, 7)$ や, $(2, 20), (2, 31), (13, 20)$ のように $\square \div 11$ と $\circ \div 11$ の余りを足すと 11 になる場合と, $(11, 22)$ のように 11 の倍数どうしの場合です。

最難関問題

1 から 100 までの間に,
11 で割って 1 余る数は 1, 12, ..., 100 の 10 個,
11 で割った余りが 2 ~ 10 の数と, 11 で割り切れる数はそれぞれ 9 個, あります。

$\square \div 11$ と $\circ \div 11$ の余りを足すと 11 になる場合

(\square, \circ) が 11 で割って 1 余る数と 10 余る数の組みあわせの場合は, $10 \times 9 = 90$ (組) あり,
それ以外の場合, つまり余りが 2 と 9, 3 と 8, 4 と 7, 5 と 6 の場合は, $9 \times 9 = 81$ (組) あるの
で, $90 + 81 \times 4 = 414$ (組) です。

\square と \circ が 11 の倍数の場合

100 以下の 11 の倍数は 9 個あるので, $\frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$ (組) です。

以上より, $414 + 36 = 450$ (組) です。

最難関問題

(5) (4) の表より,

- ・ $\square \div 11$ と $\circ \div 11$ の余りを足すと 11 になり, \triangle が一の位が 5 ではない奇数の場合
- ・ $\square \div 11$ と $\circ \div 11$ の余りを足すと 11 になり, \triangle が一の位が 5 の奇数の場合
- ・ \square と \triangle が 11 の倍数の場合

の 3 つの場合に分けて考えます。

$\square \div 11$ と $\circ \div 11$ の余りを足すと 11 になり, \triangle が一の位が 5 ではない奇数の場合

$\triangle = 7$ の場合と同様に 414 組ずつです。 \triangle にあてはまる数は,
1, 3, 7, 9, 11, 13, ..., 97, 99 の 40 個あるので,
 $414 \times 40 = 16560$ (組) です。

$\square \div 11$ と $\circ \div 11$ の余りを足すと 11 になり, \triangle が一の位が 5 の奇数の場合

\square と \circ にあてはまる 11 の倍数以外の 100 以下の整数は $100 - 9 = 91$ (個) あり, $\langle \square, 5 \rangle$
 $\langle \circ, 5 \rangle$ のうち 46 個は 11 で割った余りが 1, 45 個は 11 で割った余りが 10 になるので,
 $46 \times 45 = 2070$ (組), \triangle にあてはまる数は 5, 15, ..., 95 の 10 個あるので,
 $2070 \times 10 = 20700$ (組) です。

\square と \circ が 11 の倍数の場合

\square と \circ の組みあわせは 36 組で, \triangle は 100 以下のどの整数でもよいので,
 $36 \times 100 = 3600$ (組) です。

以上より, $16560 + 20700 + 3600 = 40860$ (組) です。