最難関問題

累乗数と素数の剰余

＜□，△＞で，□を△個かけあわせた数を表します。
例えば，２×２×２×２＝１６なので，＜２，４＞＝１６です。
次の問いに答えなさい。

（１）＜２，６＞，＜２，３３＞を１１で割ったときの余りを答えなさい。

（２）＜２，△＞＋＜９，△＞が１１の倍数となるような△にあてはまる１００以下の整数は何個ありますか。

（３）＜２０，６＞，＜２０，３３＞を１１で割ったときの余りを答えなさい。

（４）＜□，７＞＋＜○，７＞が１１の倍数となるような（□，○）にあてはまる１００以下の整数の組は何組ありますか。ただし，□＜○とします。

（５）＜□，△＞＋＜○，△＞が１１の倍数となるような（□，○，△）にあてはまる１００以下の整数の組は何組ありますか。ただし，□＜○とします。

最難関問題

累乗数と素数の剰余　（１）９，８　（２）５０個　（３）９，３　（４）４５０組　（５）４０８６０組

（１）２を順にかけ合わせてできる数２，４，８，１６，…を１１で割った余りは，

２，

２×２＝４，

４×２＝８，

８×２＝１６は１１以上の数なので１１で割った余りを求めて，１６÷１１＝１余り５より５，

５×２＝１０，

１０×２＝２０，２０÷１１＝１余り９より９，

９×２＝１８，１８÷１１＝１余り７より７，

７×２＝１４，１４÷１１＝１余り３より３，

３×２＝６，

６×２＝１２，１２÷１１＝１余り１より１，

１×２＝２，となるので，２，４，８，５，１０，９，７，３，６，１，のくり返しになります。

よって，＜２，６＞を１１で割った余りは９，

＜２，３３＞を１１で割った余りは，３３÷１０＝３余り３より周期内の３番目で８です。

（２）（１）と同様にして＜９，△＞を１１で割った余りの周期を求めると，９，４，３，５，１，のくり返しになります。＜２，△＞を１１で割った余りと並べると，１０個の数の周期になって，かげをつけた１，３，５，７，９番目の和が１１となるので，＜２，△＞＋＜９，△＞が１１の倍数になります。

＜２，△＞	2	4	8	5	１０	9	7	3	6	1
＜９，△＞	9	4	3	5	1	9	4	3	5	1

よって，△にあてはまる１００以下の整数は１００以下の奇数なので，１００÷５０（個）です。

最難関問題

（３）＜２０，△＞を１１で割った余りの周期を求めると，９，４，３，５，１，のくり返しになります。
これは，＜９，△＞を１１で割った余りの周期と完全に一致します。それは次の理由によります。
ある数□に９をかけた数は□×９で，
ある数□に２０をかけた数は□×２０＝□×（１１＋９）＝□×１１＋□×９です。□×１１は１１の倍数なので，□×９と□×２０を１１で割った余りは等しくなります。
　よって，＜２０，６＞を１１で割った余りは９，＜２０，３３＞を１１で割った余りは３です。

（４）以上より，＜□，△＞を１１で割った余りは，以下の表を右および下に繰り返していったものになります。

△	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
＜1，△＞	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
＜2，△＞	2	4	8	5	１０	9	7	3	6	1
＜3，△＞	3	9	5	4	1	3	9	5	4	1
＜4，△＞	4	5	9	3	1	4	5	9	3	1
＜5，△＞	5	3	4	9	1	5	3	4	9	1
＜6，△＞	6	3	7	9	１０	5	8	4	2	1
＜7，△＞	7	5	2	3	１０	4	6	9	8	1
＜8，△＞	8	9	6	4	１０	3	2	5	7	1
＜9，△＞	9	4	3	5	1	9	4	3	5	1
＜10，△＞	１０	1	１０	1	１０	1	１０	1	１０	1
＜11，△＞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

＜□，７＞＋＜○，７＞が１１の倍数となるのは，（□，○）が（２，９），（３，８），（４，７）や，（２，２０），（２，３１），（１３，２０）のように□÷１１と○÷１１の余りを足すと１１になる場合と，（１１，２２）のように１１の倍数どうしの場合です。

最難関問題

１から１００までの間に，
１１で割って１余る数は１，１２，…，１００の１０個，
１１で割った余りが２～１０の数と，１１で割り切れる数はそれぞれ９個，あります。

□÷１１と○÷１１の余りを足すと１１になる場合

（□，○）が１１で割って１余る数と１０余る数の組みあわせの場合は，１０×９＝９０（組）あり，それ以外の場合，つまり余りが２と９，３と８，４と７，５と６の場合は，９×９＝８１（組）あるので，９０＋８１×４＝４１４（組）です。

□と○が１１の倍数の場合

１００以下の１１の倍数は９個あるので，$\frac{9\times8}{2\times1}$＝３６（組）です。

以上より，４１４＋３６＝４５０（組）です。

最難関問題

（５）（４）の表より，

・□÷１１と○÷１１の余りを足すと１１になり，△が一の位が５ではない奇数の場合

・□÷１１と○÷１１の余りを足すと１１になり，△が一の位が５の奇数の場合

・□と△が１１の倍数の場合

の３つの場合に分けて考えます。

□÷１１と○÷１１の余りを足すと１１になり，△が一の位が５ではない奇数の場合

△＝７の場合と同様に４１４組ずつです。△にあてはまる数は，
１，３，７，９，１１，１３，…，９７，９９の４０個あるので，
４１４×４０＝１６５６０（組）です。

□÷１１と○÷１１の余りを足すと１１になり，△が一の位が５の奇数の場合

□と○にあてはまる１１の倍数以外の１００以下の整数は１００－９＝９１（個）あり，＜□，５＞
＜○，５＞のうち４６個は１１で割った余りが1，４５個は１１で割った余りが１０になるので，
４６×４５＝２０７０（組），△にあてはまる数は５，１５，…，９５の１０個あるので，
２０７０×１０＝２０７００（組）です。

□と○が１１の倍数の場合

□と○の組みあわせは３６組で，△は１００以下のどの整数でもよいので，
３６×１００＝３６００（組）です。

以上より，１６５６０＋２０７００＋３６００＝４０８６０（組）です。