受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

らせんと回転・正方形

図１のように充分に広い方眼に０から順に番号が振ってあります。方眼のマス目は１辺の長さが２㎝で，同じく１辺の長さが２㎝である図２の正方形ＡＢＣＤを向きを変えることなく０のマス目の上に置き，１，２，３，…のマス目にすべることなく転がしていきます。３５のマス目まで正方形が転がったときに頂点Ｄの通過したあとは図３のようにおうぎ形の弧を組み合わせた図形になり，おうぎ形をぬりつぶすと図４のようになります。以下の問いに答えなさい。円周率は３.１４とします。必要であれば２枚目の方眼を使ってもかまいません。

図１

20	21	22	…	
19	6	7	8	9
18	5	0	1	10
17	4	3	2	11
16	15	14	13	12

図２

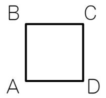


図３

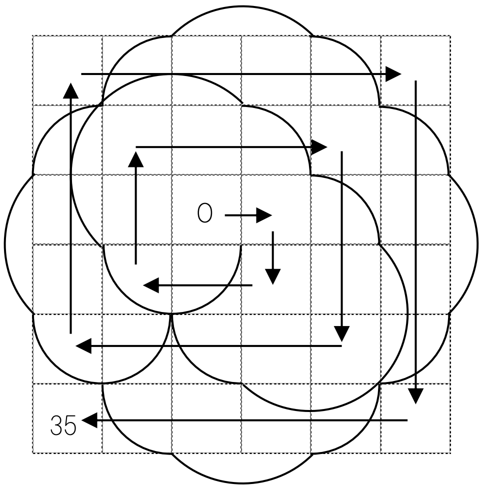
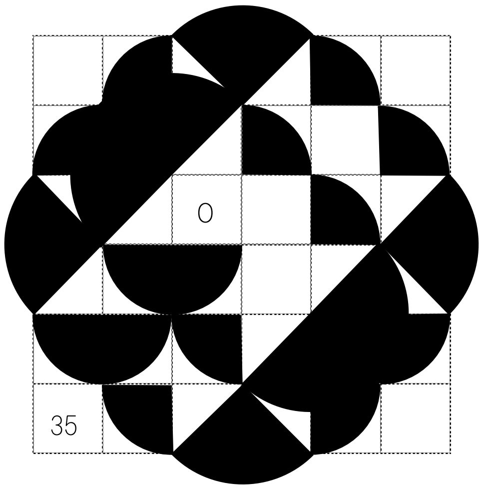


図４



（１）正方形が１４４のマス目から１６９のマス目に進む間に，頂点Ｄが通過したあとを弧とするおうぎ形の面積の和は何$㎠$ですか。

（２）次の【】の中の正しいもの全てに◯をつけなさい。ないときは，「なし」に◯をつけなさい。

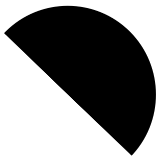
「正方形が８７のマス目からの９２マス目に進む間に，【頂点Ａ　頂点Ｂ　頂点Ｃ　頂点Ｄ　なし】が通過したあとを弧とするおうぎ形の面積の和は１５.７㎠です。」

（２枚目に続きます）

最難関問題

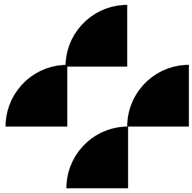
（３）図５～７の模様は，どの頂点が通過したあとを弧とするおうぎ形を塗りつぶしたものですか。【】の中の正しいもの全てに〇をつけなさい。ないときは，「なし」に〇をつけなさい。ただし，模様は向きを変えてはいけないものとします。

図５



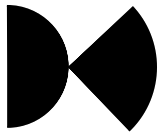
【　A　B　C　D　なし　】

図６



【　A　B　C　D　なし　】

図７



【　A　B　C　D　なし　】

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

らせんと回転・正方形

（１）７５．３６㎝^{2}　（２）頂点Ａ，頂点Ｃ

（３）図５…Ｂ，図６…なし，図７…Ａ，Ｃ

（１）正方形は毎回時計回りに９０度回転するので，頂点Ｄの位置は図８のように４回で元の位置（右下の位置)に戻ってきます。１４４は４で割り切れますから，１４４のマス目に正方形が転がってきたとき，頂点Ｄは最初と同じ右下の位置にあります。また，１６９÷４＝４２余り１より，１６９のマス目に正方形が転がってきたとき，頂点Ｄは最初のＡの位置，つまり左下の位置にあります。

　１４４より前には０から１４３までの１４４マスがあり，１４４＝１２×１２ですから，１４４のマス目は図９の位置にあります。１６９のマス目についても同様に位置を確かめておきます。

図８

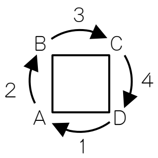


図９

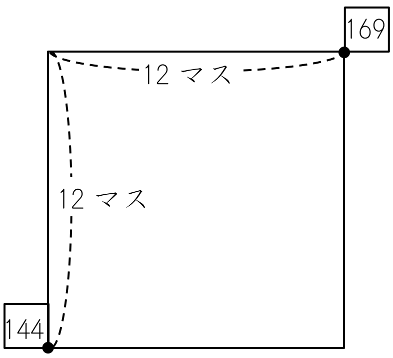


図１１

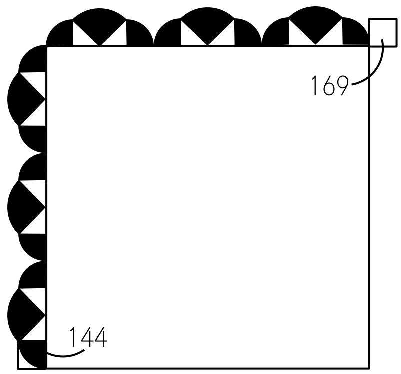


図１０

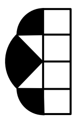


　図９の１４４のマス目から，頂点Ｄは４マスごとに図１０のようなおうぎ形の弧を描きます。１２÷４＝３より，それを３回繰り返すので，１４４のマス目から１６９のマス目までの頂点Ｄの動いたあとは，図１１のようになります。１６８のマス目から１６９のマス目にかけて，頂点Ｄは動きません。図１０のおうぎ形の面積の和は２×２×３．１４×$\frac{1}{4}$×２＋８×３．１４×$\frac{1}{4}$＝４×３．１４（㎝^{2}）ですから，４×３．１４×６＝２４×３．１４＝７５．３６（㎝^{2}）です。

最難関問題

（２）８７の手前にある平方数は９×９＝８１ですから，８７および９２のマス目の位置は図１２のようになります。８７÷４＝２１余り３より，８７のマス目に転がってきたとき，頂点は最初の位置から時計回りに３つ進んだ位置にあり，９２÷４＝２３余り０より，９２のマス目においては最初の位置にあります。よって，頂点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄの動いたあとは，図１３のようになります。

図１２

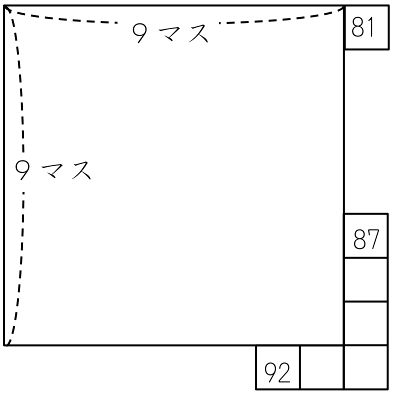


図１３

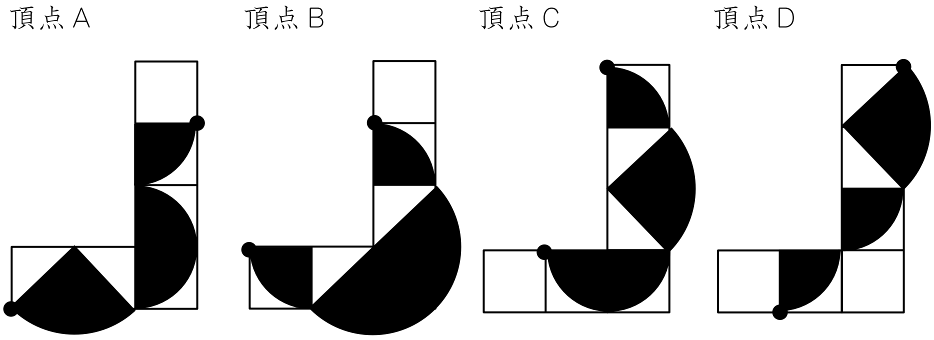


図１３において，頂点Ａの動いたあとが弧となっているおうぎ形の面積の和は，

$2 \times 2 \times 3.14 \times \frac{1}{4} \times 3 + 8 \times 3.14 \times \frac{1}{4} \times 1 = 5 \times 3.14 = 15.7$（$cm^2$）です。

頂点Ｂの動いたあとが弧となっているおうぎ形の面積の和は，

$2 \times 2 \times 3.14 \times \frac{1}{4} \times 2 + 8 \times 3.14 \times \frac{1}{4} \times 2 = 6 \times 3.14 = 18.84$（$cm^2$）です。

頂点Ｃの動いたあとが弧となっているおうぎ形の面積の和は，

$2 \times 2 \times 3.14 \times \frac{1}{4} \times 3 + 8 \times 3.14 \times \frac{1}{4} \times 1 = 5 \times 3.14 = 15.7$（$cm^2$）です。

頂点Ｄの動いたあとが弧となっているおうぎ形の面積の和は，

$2 \times 2 \times 3.14 \times \frac{1}{4} \times 2 + 8 \times 3.14 \times \frac{1}{4} \times 1 = 4 \times 3.14 = 12.56$（$cm^2$）です。

よって，頂点Ａと頂点Ｃが条件を満たします。

最難関問題

（３）模様は正方形がマス目をまっすぐ進む場合にはのような，（１）の図１０を回転させたものが続きます。図５～７はいずれも，その一部を抜き出したものにはなっていませんから，角を曲がるときを考えます。

$\boxed{\text{図５}}$

図５の模様は，図１４のように正方形が進むときにできると考えられます。

図１４

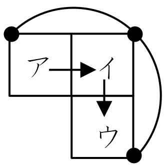
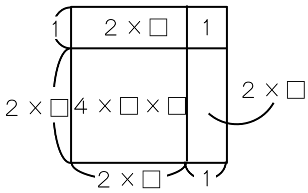


図１５



イのマス目は７×７＝４９のような同じ奇数をかけあわせた平方数のマス目です。奇数を２×□＋１とすると，平方数（２×□＋１）×（２×□＋１）は，図１５の面積図より４×（□×□＋□）＋１となるので，必ず４の倍数に１を加えた数になりますから，アのマス目は４の倍数のマス目です。アのマス目で●をつけた左上の位置にあるということから，頂点Ｂです。

$\boxed{\text{図６}}$

図６の模様は，図１６のように正方形が進むときにできると考えられます。

図１６

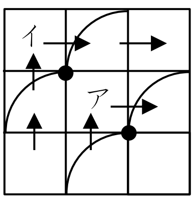
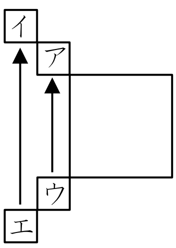


図１７



アのマス目においてもイのマス目においても，頂点は右下にあります。ここで，ア，イのマス目の手前にある偶数の平方数のマス目をウ，エとします。ウとエにおいて頂点は最初の位置にあります。図１７のように，ウからアまで進むときより，エからイに進むときの方が，２つ多くマス目を進んでいるので，アとイの両方において頂点が同じ右下の位置にくることはあり得ません。よって，「なし」です。

最難関問題

図７

　図７の模様は，図１８，１９のように正方形が進むときにできると考えられます。●印は正方形がア，イ，ウ，エのマス目にあるときの頂点の位置を示します。

図１８

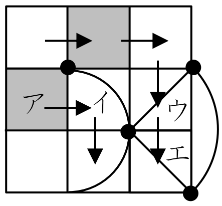


図１９

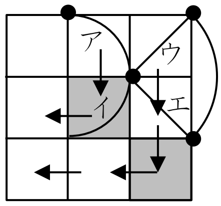


図２０

20	21	22	…	
19	6	7	8	9
18	5	0	1	10
17	4	3	2	11
16	15	14	13	12

　図１８において，影をつけたマス目は図５の場合に考えたように最初の位置にあります。よって，頂点Ｃが考えられますが，ウのマス目に来たときに頂点Ｃは右上→右下→左下の位置にあるはずなので，条件にあいません。よって，図１８は条件にあいません。

　図１９については，右下の角の位置にあるマス目を考えます。図２０のように，右下の角は偶数のマス目ですが，４の倍数とそうではない数が交代で現れます。図１９のイのマス目が４の倍数である場合，頂点はＣとなります。イの外側にある影をつけたマス目は４の倍数ではない偶数のマス目ですから，ウのマス目は４の倍数のマス目となります。ウのマス目においても頂点Ｃは最初の位置にあるので，条件を満たします。

　また，イのマス目が４の倍数ではない偶数の場合，ウのマス目も４の倍数ではない偶数となります。このときは，２つ進んで右上の位置にくる頂点Ａが条件を満たします。

　以上より，頂点Ａ，Ｃが答えとなります。

　次のページはおまけです。

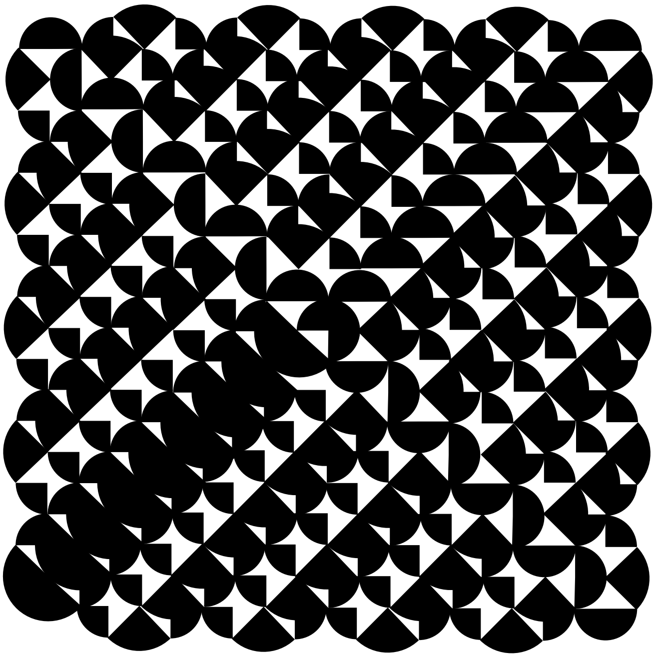
受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

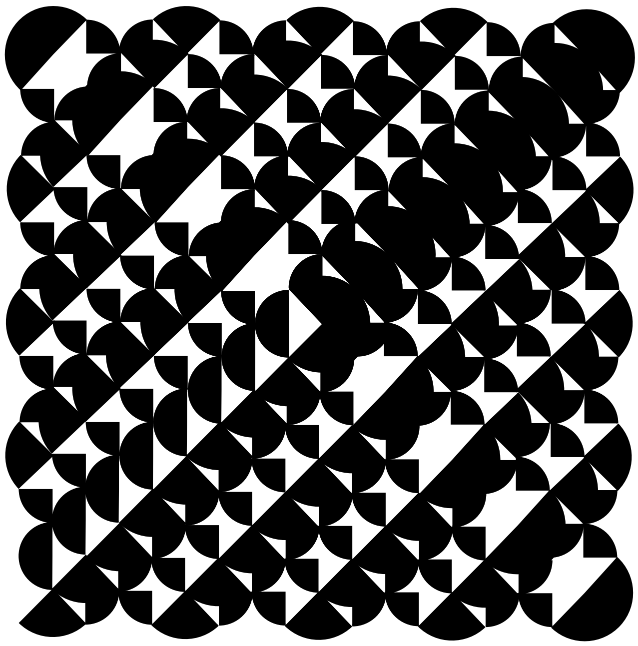
最難関問題

それぞれの頂点の描く模様は，次のようになります。回転しても互いに重なりません。

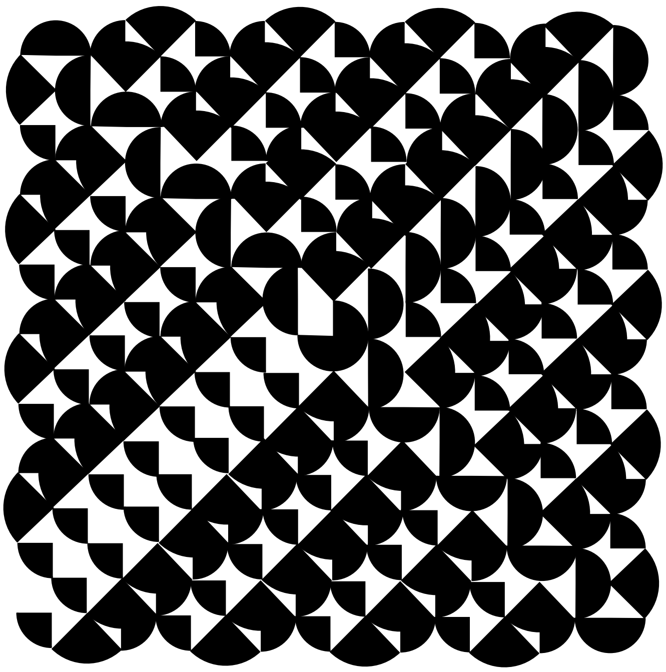
頂点Ａが動いたあと



頂点Ｂが動いたあと



頂点Ｃが動いたあと



頂点Ｄが動いたあと