受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

重複回文数

１１１，１２３２１のように，右から見ても左から見ても数字の並びが同じ整数を，回文数といいます。１のような１けたの整数は回文数とはみなしません。それに対して，次のような整数を，「重複回文数」と呼ぶことにします。

まず，１１１や１２３２１といった回文数に加えて，０００や０２３２０のように，０から始まって右からも左からも数字の並びが同じになっている２個以上の数の列を，回文列とします。

そして，左から順に回文数と回文列を重ねた整数を，重複回文数とします。例えば，１２３４３２１２３は，１２３４３２１と３２１２３を重ねてできる重複回文数です。また，１１２１も１１と１２１を重ねてできる重複回文数です。８０８０は８０８と０８０を重ねた重複回文数です。１２３２１は回文数ですが，１２３２１を２個重ねてできた重複回文数でもあります。それに対して，１１２３２は２つの回文数１１と２３２を並べただけで重なりがないので，重複回文数ではありません。また，０８０８は左から回文列０８０→回文数８０８の順に重ねているので，重複回文数ではありませんし，そもそも整数ですらありません。

以下の問いに答えなさい。

（１）９９９９以下の重複回文数は何個ありますか。

（２）５けたの重複回文数は何個ありますか。

（３）小さいほうから１０００番目の重複回文数を答えなさい。

最難関問題

重複回文数　（１）４３２個　（２）２０３４個　（３）３４９４３

（１）

２けたの重複回文数は１１，２２，３３，…，９９のみですから，全て回文数で，９個あります。

３けたの重複回文数はみな〇□〇（※〇＝□であってもよい）という形の回文数です。〇にあてはまる数は１～９の９通り，□にあてはまる数は０～９の１０通りですから，９×１０＝９０（個）あります。

４けたの重複回文数は何種類かあります。以下，Ｎけたの回文数とＭ個数字が並んだ回文列を（Ｎ，Ｍ）と表すことにします。

・回文数〇□□〇（※〇＝□であってもよい）…９×１０＝９０（個）あります。

・（３，３）〇□〇□（※〇≠□）…〇には１～９のどれかが入り，□には０～１０のうちで〇とは別の数が入るので，９×９＝８１（個）あります。

・（３，２）〇□〇〇（※〇≠□）…〇には１～９のどれかが入り，□には０～１０のうちで〇とは別の数が入るので，９×９＝８１（個）あります。

・（２，３）〇〇□〇（※〇≠□）…〇には１～９のどれかが入り，□には０～１０のうちで〇とは別の数が入るので，９×９＝８１（個）あります。

よって，４けたの重複回文数は，９０＋８１×３＝３３３（個）あります。以上より９９９９以下の重複回文数は，９＋９０＋３３３＝４３２（個）あります。

最難関問題

（２）

・回文数○□△□○（※○，□，△のうち２つあるいは３つが同じ数であってもよい）…９×１０×１０＝９００（個）あります。

・（４，３）○□□○□（※○≠□）…○には１～９のどれかが入り，□には０～１０のうちで○とは別の数が入るので，９×９＝８１（個）あります。

・（４，２）○□□○○（※○≠□）…○には１～９のどれかが入り，□には０～１０のうちで○とは別の数が入るので，９×９＝８１（個）あります。また，○が０でないことから，この重複回文数をひっくり返した（２，４）の○○□□○も重複回文数です。あわせて，８１×２個あります。

・（３，４）○□○○□（※○≠□）…○には１～９のどれかが入り，□には０～１０のうちで○とは別の数が入るので，９×９＝８１（個）あります。

・（３，３）○□○△□（※○，□，△は互いに異なる）…○には１～９のどれかが入り，□には０～１０のうちで○とは別の数が入り，△には○とも□とも異なる数がはいるので，９×９×８＝８１×８（個）あります。

・（３，３）○□○○○（※○≠□）…○には１～９のどれかが入り，□には０～１０のうちで○とは別の数が入るので，９×９＝８１（個）あります。また，○が０でないことから，この重複回文数をひっくり返した○○○□○も重複回文数です。あわせて，８１×２個あります。

以上より，９００＋８１×（１＋２＋１＋８＋２）＝２０３４（個）あります。

最難関問題

（３）

９９９９以下の重複回文数は（１）より４３２個ありますから，５けたの重複回文数の小さいほうから１０００－４３２＝５６８（番目）を求めます。

５けたの重複回文数は全部で２０３４個ありました。万の位は１～９の９通りですから，２０３４÷９＝２２６より，万の位を決めるとそれぞれ２２６個の重複回文数があることになります。よって，５６８－２２６×２＝１１６より，万の位が３である重複回文数の小さいほうから１１６番目を求めればよいことになります。

まずは２２６個の万の位が３である重複回文数の内訳をみておきましょう。千の位が３以外の数である場合，重複回文数は次のようになります。例として千の位を０とすると，

・回文数３０△０３…△にはどの数が入ってもよいので，１０個あります。

・（４，３）３００３０

・（４，２）３００３３

・（３，４）３０３３０

・（３，３）３０３△３…△には３とも０とも異なる数がはいるので，８個あります。

・（３，３）３０３３３

となるので，２２個あります。千の位が３以外であればこれは変わりませんから，あわせて２２×９＝１９８（個）となります。

千の位が３の場合はどうでしょうか。

・回文数３３△３３…△にはどの数が入ってもよいので，１０個あります。

・（３，３）３３３△３…△には３とは異なる数がはいるので，９個あります。

・（２，４）３３□□３…（４，２）をひっくり返した形です。□には３とは異なる数がはいるので，９個あります。

よって，１０＋９×２＝２８（個）あります。１９８＋２８＝２２６より，これで万の位が３である２２６個の重複回文数の内訳がわかりました。

千の位が０の場合から順に個数を追っていくと，２２×３＋２８＋２２＝１１６より，千の位が４である最大の重複回文数を求めればよいことがわかります。その数は，３４ＡＢＣという形をしていますから，Ａ＝９とすると，３４９ＢＣとなります。この形をした重複回文数は，回文数○□△□○のみですから，３４９４３が１０００番目の重複回文数です。