

2026と2025と2027

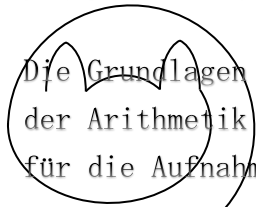
2026は、平方数である2025と、素数である2027に挟まれています。このように、直前の整数が平方数で直後の整数が素数であるような整数のうちで、1より大きく2026より小さい数を考えます。

(1) このような数のうちで、最小のものを答えなさい。

(2) このような数のうちで、最大のものを答えなさい。

(3) …おまけの問題で、とばしてよいでしょう。

このような数は何個ありますか。



2025と2026と2027 (1) 10 (2) 1522 (3) 6個

(1) 6で割ったときの余りが0, 2, 3, 4となる数は2か3の倍数なので, 2と3を除けば素数ではありません。素数は6で割った余りが1か5の数です。

連続する3つの整数の3個目が6で割って1余る整数の場合, 3つの整数は(余り5), (余り0), (余り1)です。ところが, 6で割った余りが5となる平方数は存在しません。平方数と6で割った余りの関係は次の表の通りです。

もとの数	平方数	6で割った余り
0	0	0
1	1	1
2	4	4
3	9	3
4	16	4
5	25	1

連続する3つの整数の3個目が6で割って5余る整数の場合, 3つの整数は(余り3), (余り4), (余り5)です。6で割った余りが3である平方数は, もとの数も6で割った余りが3です。2025 = 45 × 45なので, 45未満の6で割って3余る数を考えます。

$3 \times 3 = 9$ のとき, $9 + 2 = 11$ は素数なので, 10が最小です。

(2) $39 \times 39 = 1521$, $1521 + 2 = 1523$ が素数かどうかを考えます。1523が合成数の場合, 素因数分解において現れる最小の素数は39以下です。39以下の素数で順に割っていくと, どれでも割ることができないので, 1523は素数です。よって, 1522が最大です。

(3) $9 \times 9 + 2 = 83$ は素数,

$15 \times 15 + 2 = 227$ は素数,

$21 \times 21 + 2 = 443$ は素数,

$27 \times 27 + 2 = 731 = 17 \times 43$ は合成数,

$33 \times 33 + 2 = 1091$ は素数,

となるので, (1)(2)の2個とあわせて, 6個です。