

## 最難関問題

### 二重のフィボナッチ

袋から玉を取り出します。玉は1度に1個か2個取り出します。例えば、玉を3個取り出すためには、1個・1個・1個、1個・2個、2個・1個の3通りの取り出し方があります。次の問いに答えなさい。

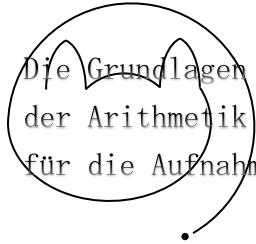
(1) 連続して玉を2個取り出すことはありませんでした。

- ① 6個の玉の取り出し方は何通りありますか。
- ② 10個の玉の取り出し方は何通りありますか。

(2) 連続して玉を1個取り出すことはありませんでした。

- ① 6個の玉の取り出し方は何通りありますか。
- ② 10個の玉の取り出し方は何通りありますか。

(3) 玉を13個取り出しましたが、途中で玉を連続して1個取り出すことがあり、連続して2個取り出すこともありました。このようなん玉の取り出し方は何通りありますか。



## 最難関問題

二重のフィボナッチ (1) ① 9通り ② 4 1通り (2) ① 4通り ② 1 2通り (3) 3 8 5通り

(1) 取り出す玉の個数が3個以下の場合、そもそも連続して1度に2個取り出すことができないので、次のようになります。

取り出す玉の個数 (個)	1	2	3
取り出し方の合計 (通り)	1	2	3
最後に1個取り出す (通り)	1	1	2
最後に2個取り出す (通り)	0	1	1

玉を4個取り出すときは、直前に玉を1個取り出して、合計で2個取り出していなければならないので、次のようになります。

取り出す玉の個数	1	2	3	4
取り出し方の合計	1	2	3	4
最後に1個取り出す	1	1	2	3
最後に2個取り出す	0	1	1	1

玉を5個、6個取り出すときも同様にして、次のようになります。

取り出す玉の個数	1	2	3	4	5	6
取り出し方の合計	1	2	3	4	6	9
最後に1個取り出す	1	1	2	3	4	6
最後に2個取り出す	0	1	1	1	2	3

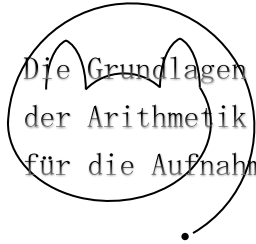
最後に1個取り出す方法は、1つ少ない個数の玉のすべての取り出し方と等しいので、

取り出す玉の個数	1	2	3	4	5	6
取り出し方の合計	1	2	3	4	6	9
最後に1個取り出す	1	1	2	3	4	6
最後に2個取り出す	0	1	1	1	2	3

結局は1つ前と3つ前の取り出し方の合計の和を求めればよいことになるので、次のようになります。

取り出す玉の個数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
取り出し方の合計	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41

以上より①は9通り、②は4 1通りです。



最難関問題

(2) 玉を1度に2個取り出す方法は、2つ少ない個数の玉のすべての取り出し方と等しいので、下の表の左側ようになります。また、玉を1度に1個取り出す方法は、1つ少ない個数の玉を最後に2個1度に取り出す方法と等しいので、下の表の右側ようになります。

取り出す玉の個数	1	2	3	4	5	6
取り出し方の合計	1	1	2	2	3	4
最後に1個取り出す	1	0	1	1	1	2
最後に2個取り出す	0	1	1	1	2	2

1	2	3	4	5	6
1	1	2	2	3	4
1	0	1	1	1	2
0	1	1	1	2	2

上の2種類の矢印を組みあわせると、次のようになるので、

取り出す玉の個数	1	2	3	4	5	6
取り出し方の合計	1	1	2	2	3	4
最後に1個取り出す	1	0	1	1	1	2
最後に2個取り出す	0	1	1	1	2	2

結局は2つ前と3つ前の取り出し方の合計の和を求めればよいことになるので、次のようになります。

取り出す玉の個数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
取り出し方の合計	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12

以上より①は4通り、②は12通りです。

(3) (1) の表を続けると次のようになります。

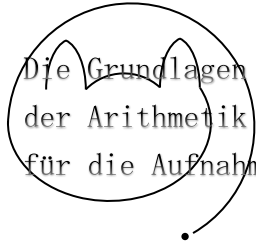
取り出す玉の個数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
取り出し方の合計	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189

また、(2) の表を続けると次のようになります。

取り出す玉の個数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
取り出し方の合計	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37

さらに、すべての玉の取り出し方はふつうのフィボナッチ数列の規則に従うので、次のようになります。

取り出す玉の個数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
取り出し方の合計	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610



## 最難関問題

これらのことをあわせると、14個の玉を取り出すときの場合の数は次の表のようになります。○は連続して取り出すことがある場合、×はない場合を表します。

		1個の連続		
		○	×	
2個の連続	○	ウ	イ	421
	×		ア	189
			37	610

表のアは1個と2個の取り出しを交互に行う取り出し方なので、 $14 \div (1 + 2) = 4$  余り2より、最後に2個取り出す他ないため、2個・1個・2個・1個・2個・1個・2個・1個・2個の1通りです。イは $37 - 1 = 36$  (通り)、ウは $610 - 189 = 421$  より、 $421 - 36 = 385$  (通り) です。