最難関問題

半素数と約数の和

　素因数分解をすると，２０２６＝２×１０１３です。このように，２個の素数の積である整数を，半素数といいます（半素数には，２×２＝４のように同じ素数２個の積である整数も含みます）。
２０２６の約数は１，２，１０１３，２０２６で，その和は１＋２＋１０１３＋２０２６＝３０４２です。
３０４２を２で割ると１５２１になり，１５２１は３９×３９なので，平方数です。
　このように，半素数で約数の和が平方数の２倍である整数は，５００以下で何個ありますか。

最難関問題

半素数と約数の和　１３個

　以下において，□，△は素数，○は整数を表すものとします。まず，□×□の半素数は，すべて条件を満たしません。□×□の約数の和は，１＋□＋□×□です。□が偶数でも奇数でも，１＋□＋□×□は奇数です。よって，□×△の半素数について考えていきます。□＜△として，□の値に応じて場合分けをします。

□＝２の場合

　約数の和は，１＋２＋△＋△×２＝３＋△×３＝３×（１＋△）です。３×（１＋△）が平方数の２倍の場合，１＋△＝２×３×○×○＝６×○×○が成り立ちます。○に１から順に整数をあてはめていくと，
△が５００÷２＝２５０以下の範囲で条件を満たすのは，以下の４通りです。

　１＋５＝６×１×１，

　１＋２３＝６×２×２，

　１＋５３＝６×３×３，

　１＋１４９＝６×５×５

□＝３の場合

　約数の和は，１＋３＋△＋△×３＝４＋△×４＝４×（１＋△）です。４×（１＋△）が平方数の２倍の場合，１＋△＝２×○×○が成り立ちます。○に１から順に整数をあてはめていくと，
△が５００÷３＝１６６.…以下の範囲で条件を満たすのは，以下の６通りです。

　１＋７＝２×２×２，

　１＋１７＝２×３×３，

　１＋３１＝２×４×４，

　１＋７１＝２×６×６，

　１＋９７＝２×７×７，

　１＋１２７＝２×８×８

□＝５の場合

　約数の和は，１＋５＋△＋△×５＝６＋△×６＝６×（１＋△）です。６×（１＋△）が平方数の２倍の場合，１＋△＝３×○×○が成り立ちます。○に１から順に整数をあてはめていくと，
△が５００÷５＝１００以下の範囲で条件を満たすのは，以下の２通りです。

　１＋１１＝３×２×２，

　１＋４７＝３×４×４

□＝７の場合

約数の和は，１＋７＋△＋△×７＝８＋△×８＝８×（１＋△）です。８×（１＋△）が平方数の２倍の場合，１＋△＝○×○が成り立ちます。○に１から順に整数をあてはめていくと，

△が５００÷７＝７１.…以下の範囲で条件を満たす場合はありません。

□＝１１の場合

約数の和は，１＋１１＋△＋△×１１＝１２＋△×１２＝１２×（１＋△）です。１２×（１＋△）が平方数の２倍の場合，１＋△＝６×○×○が成り立ちます。○に１から順に整数をあてはめていくと，

△が５００÷１１＝４５.…以下の範囲で条件を満たすのは，以下の１通りです。

１＋２３＝６×２×２

□＝１３の場合

約数の和は，１＋１３＋△＋△×１３＝１４＋△×１４＝１４×（１＋△）です。１４×（１＋△）が平方数の２倍の場合，１＋△＝７×○×○が成り立ちます。○に１から順に整数をあてはめていくと，

△が５００÷１３＝３８.…以下の範囲で条件を満たす場合はありません。

□＝１７の場合

約数の和は，１＋１７＋△＋△×１７＝１８＋△×１８＝１８×（１＋△）です。１８×（１＋△）が平方数の２倍の場合，１＋△＝○×○が成り立ちます。○に１から順に整数をあてはめていくと，

△が５００÷１７＝２９.…以下の範囲で条件を満たす場合はありません。

□＝１９の場合

約数の和は，１＋１９＋△＋△×１９＝２０＋△×２０＝２０×（１＋△）です。２０×（１＋△）が平方数の２倍の場合，１＋△＝１０×○×○が成り立ちます。○に１から順に整数をあてはめていくと，

△が５００÷１９＝２６.…以下の範囲で条件を満たす場合はありません。

□＝２３の場合

５００÷２３＝２１.…なので，条件を満たす場合はありません。

以上より，４＋６＋２＋１＝１３（個）です。