

最難関問題

2020の問題・3

$\frac{1}{2020} = \frac{1}{404} - \frac{1}{505}$ です。このことを参考にして、次の計算をなさい。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{196} + \frac{1}{19404} + \frac{1}{594} + \frac{1}{29700} + \frac{1}{1200} + \frac{1}{40400} + \frac{1}{2020} + \frac{1}{51510} + \\ & \frac{1}{3060} + \frac{1}{63036} + \frac{1}{4326} + \frac{1}{74984} \end{aligned}$$



最難関問題

2020の問題・3 $\frac{45}{5096}$

$\frac{1}{2020} = \frac{1}{404} - \frac{1}{505}$ となる理由を考えると、

$$\frac{1}{404} - \frac{1}{505} = \frac{5}{404 \times 5} - \frac{4}{505 \times 4} = \frac{5}{4 \times 101 \times 5} - \frac{4}{4 \times 101 \times 5} = \frac{5-4}{4 \times 101 \times 5} = \frac{1}{4 \times 101 \times 5} = \frac{1}{2020}$$

だからです。

そこで、 $\frac{1}{2020}$ の左にある $\frac{1}{40400}$ の分母40400を404で割ると、商が100となるので、

$$\frac{1}{40400} = \frac{1}{100 \times 4 \times 101} = \frac{101-100}{100 \times 4 \times 101} = \frac{101}{100 \times 4 \times 101} - \frac{100}{100 \times 4 \times 101} = \frac{1}{100 \times 4} - \frac{1}{4 \times 101} = \frac{1}{400} - \frac{1}{404}$$

ですから、

$$\frac{1}{40400} + \frac{1}{2020} = \frac{1}{400} - \frac{1}{404} + \frac{1}{404} - \frac{1}{505} = \frac{1}{400} - \frac{1}{505}$$

となって計算を簡略化することができます。

同様に、 $\frac{1}{40400}$ の左にある $\frac{1}{1200}$ の分母1200を400で割る、ということをしていくと、

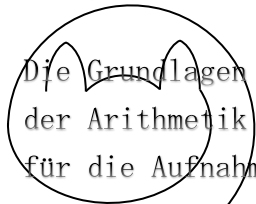
$$1200 \div 400 = 3 \text{ より, } \frac{1}{1200} = \frac{1}{3 \times 100 \times 4} = \frac{1}{300} - \frac{1}{400},$$

$$29700 \div 300 = 99 \text{ より, } \frac{1}{29700} = \frac{1}{99 \times 3 \times 100} = \frac{1}{297} - \frac{1}{300},$$

$$594 \div 297 = 2 \text{ より, } \frac{1}{594} = \frac{1}{2 \times 99 \times 3} = \frac{1}{198} - \frac{1}{297},$$

$$19404 \div 198 = 98 \text{ より, } \frac{1}{19404} = \frac{1}{98 \times 2 \times 99} = \frac{1}{196} - \frac{1}{198},$$

$$196 \div 196 = 1 \text{ より, } \frac{1}{196} = \frac{1}{1 \times 98 \times 2} = \frac{1}{98} - \frac{1}{196} \text{ となります。}$$



最難関問題

また、 $\frac{1}{2020}$ から右に進むと、

$$51510 \div 505 = 102 \text{ より, } \frac{1}{51510} = \frac{1}{101 \times 5 \times 102} = \frac{1}{505} - \frac{1}{510},$$

$$3060 \div 510 = 6 \text{ より, } \frac{1}{3060} = \frac{1}{5 \times 102 \times 6} = \frac{1}{510} - \frac{1}{612},$$

$$63036 \div 612 = 103 \text{ より, } \frac{1}{63036} = \frac{1}{102 \times 6 \times 103} = \frac{1}{612} - \frac{1}{618},$$

$$4326 \div 618 = 7 \text{ より, } \frac{1}{4326} = \frac{1}{6 \times 103 \times 7} = \frac{1}{618} - \frac{1}{721},$$

$$74984 \div 721 = 104 \text{ より, } \frac{1}{74984} = \frac{1}{103 \times 7 \times 104} = \frac{1}{721} - \frac{1}{728}, \text{ となります。}$$

以上より、

$$\frac{1}{196} + \frac{1}{19404} + \frac{1}{594} + \frac{1}{29700} + \frac{1}{1200} + \frac{1}{40400} + \frac{1}{2020} + \frac{1}{51510} +$$

$$\frac{1}{3060} + \frac{1}{63036} + \frac{1}{4326} + \frac{1}{74984}$$

$$= \frac{1}{98} - \frac{1}{728} = \frac{1}{2 \times 7 \times 7} - \frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 13} = \frac{2 \times 2 \times 13 - 7}{2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 13} = \frac{45}{5096}$$

となるので、 $\frac{45}{5096}$ です。