受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

巨大フィボナッチ数

最初の２つの数が１，１で，以降は前の２つの数の和が並ぶ数列を，フィボナッチ数列といいます。

１，１，２，３，５，８，１３，２１，３４，５５，８９，１４４，２３３，３７７，…

（１）フィボナッチ数列の連続する２つの数について，それぞれの平方数をたすと，

１×１＋１×１＝２，　１×１＋２×２＝５，　２×２＋３×３＝１３，

３×３＋５×５＝３４，　５×５＋８×８＝８９，…

のように，和がどれもフィボナッチ数列に現れる数になります。

□，△をフィボナッチ数列の連続する２つの数として，□×□＋△×△がフィボナッチ数列に現れる数であることをかんたんに説明しなさい。

（２）フィボナッチ数列の連続する２つの数の積を求めると，

１×１＝１，　１×２＝２，　２×３＝６，　３×５＝１５，　５×８＝４０，…

となります。さらに，以上の積のとなりあうものの和を求めると，

１＋２＝３，　２＋６＝８，　６＋１５＝２１，　１５＋４０＝５５，　…

のように，和がどれもフィボナッチ数列に現れる数になります。

○，□，△をフィボナッチ数列の連続する３つの数として，○×□＋□×△がフィボナッチ数列に現れる数であることをかんたんに説明しなさい。

（３）フィボナッチ数列に現れる３０番目の整数を求めなさい。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

巨大フィボナッチ数　（１）（２）解説参照　（３）８３２０４０

（１）（２）は以前に公開した最難関問題です。

（１）「連続する２つのフィボナッチ数の平方数の和」

（２）「連続するフィボナッチ数の積の和」

（１）（解答例）

□，△，□＋△，□＋△×２，□×２＋△×３，□×３＋△×５，□×５＋△×８，□×８＋△×１３，…となり，□と△はフィボナッチ数列の連続する数なので，どこかで□×□＋△×△が現れるから。

（２）（解答例）

○，□，△，□＋△，□＋△×２，□×２＋△×３，□×３＋△×５，□×５＋△×８，□×８＋△×１３，…となり，○と□はフィボナッチ数列の連続する数なので，どこかで□×○＋△×□が現れるから。

（３）ｎ番目のフィボナッチ数を［ｎ］で表します。たとえば，［7］＝１３です。（１）（２）で考えたことをまとめると，

［ｎ－１］，［ｎ］，［ｎ＋１］，［ｎ］×１＋［ｎ＋１］×１，［ｎ］×１＋［ｎ＋１］×２，

［ｎ］×２＋［ｎ＋１］×３，［ｎ］×３＋［ｎ＋１］×５，［ｎ］×５＋［ｎ＋１］×８，…，

［ｎ］×［ｎ－１］＋［ｎ＋１］×［ｎ］　←　これは，［ｎ］よりｎ個あとのフィボナッチ数なので，［ｎ×２］です。

［ｎ］×［ｎ］＋［ｎ＋１］×［ｎ＋１］　←　これは，［ｎ］よりｎ＋１個あとのフィボナッチ数なので，［ｎ×２＋１］です。

　このようにして，偶数番目および奇数番目のフィボナッチ数は，より小さいフィボナッチ数から計算で求めることができます。

［３０］＝［１５×２］より，［３０］＝［１５］×［１４］＋［１６］×［１５］，

［１４］＝［7×２］より，

［１４］＝［7］×［6］＋［8］×［7］＝１３×８＋２１×１３＝３７７，

［１５］＝［7×２＋1］より，

［１５］＝［7］×［7］＋［8］×［8］＝１３×１３＋２１×２１＝６１０，

［１６］＝３７７＋６１０＝９８７

よって，

［３０］＝［１５］×［１４］＋［１６］×［１５］＝６１０×３７７＋９８７×６１０

＝（３７７＋９８７）×６１０＝８３２０４０です。