

巨大フィボナッチ数

最初の2つの数が1, 1で、以降は前の2つの数の和が並ぶ数列を、フィボナッチ数列といいます。

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

(1) フィボナッチ数列の連続する2つの数について、それぞれの平方数をたすと、

$$1 \times 1 + 1 \times 1 = 2, \quad 1 \times 1 + 2 \times 2 = 5, \quad 2 \times 2 + 3 \times 3 = 13, \\ 3 \times 3 + 5 \times 5 = 34, \quad 5 \times 5 + 8 \times 8 = 89, \dots$$

のように、和がどれもフィボナッチ数列に現れる数になります。

\square, \triangle をフィボナッチ数列の連続する2つの数として、 $\square \times \square + \triangle \times \triangle$ がフィボナッチ数列に現れる数であることをかんたんに説明しなさい。

(2) フィボナッチ数列の連続する2つの数の積を求めると、

$$1 \times 1 = 1, \quad 1 \times 2 = 2, \quad 2 \times 3 = 6, \quad 3 \times 5 = 15, \quad 5 \times 8 = 40, \dots$$

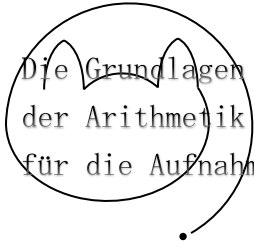
となります。さらに、以上の積のとなりあうものの和を求めると、

$$1 + 2 = 3, \quad 2 + 6 = 8, \quad 6 + 15 = 21, \quad 15 + 40 = 55, \quad \dots$$

のように、和がどれもフィボナッチ数列に現れる数になります。

$\circ, \square, \triangle$ をフィボナッチ数列の連続する3つの数として、 $\circ \times \square + \square \times \triangle$ がフィボナッチ数列に現れる数であることをかんたんに説明しなさい。

(3) フィボナッチ数列に現れる30番目の整数を求めなさい。



巨大フィボナッチ数 (1)(2) 解説参照 (3) 832040

(1)(2) は以前に公開した最難関問題です。

(1) 「連続する2つのフィボナッチ数の平方数の和」

(2) 「連続するフィボナッチ数の積の和」

(1) (解答例)

$\square, \triangle, \square + \triangle, \square + \triangle \times 2, \square \times 2 + \triangle \times 3, \square \times 3 + \triangle \times 5, \square \times 5 + \triangle \times 8, \square \times 8 + \triangle \times 13,$
…となり、 \square と \triangle はフィボナッチ数列の連続する数なので、どこかで $\square \times \square + \triangle \times \triangle$ が現れるから。

(2) (解答例)

$\circ, \square, \triangle, \square + \triangle, \square + \triangle \times 2, \square \times 2 + \triangle \times 3, \square \times 3 + \triangle \times 5, \square \times 5 + \triangle \times 8, \square \times 8 + \triangle \times 13,$
…となり、 \circ と \square はフィボナッチ数列の連続する数なので、どこかで $\square \times \circ + \triangle \times \square$ が現れるから。

(3) n 番目のフィボナッチ数を $[n]$ で表します。たとえば、 $[7] = 13$ です。(1)(2) で考えたことをまとめると、

$[n-1], [n], [n+1], [n] \times 1 + [n+1] \times 1, [n] \times 1 + [n+1] \times 2,$
 $[n] \times 2 + [n+1] \times 3, [n] \times 3 + [n+1] \times 5, [n] \times 5 + [n+1] \times 8, \dots,$
 $[n] \times [n-1] + [n+1] \times [n] \leftarrow$ これは、 $[n]$ より n 個あとのフィボナッチ数なので、 $[n \times 2]$ です。

$[n] \times [n] + [n+1] \times [n+1] \leftarrow$ これは、 $[n]$ より $n+1$ 個あとのフィボナッチ数なので、 $[n \times 2 + 1]$ です。

このようにして、偶数番目および奇数番目のフィボナッチ数は、より小さいフィボナッチ数から計算で求めることができます。

$$[30] = [15 \times 2] \text{ より}, [30] = [15] \times [14] + [16] \times [15],$$

$$[14] = [7 \times 2] \text{ より},$$

$$[14] = [7] \times [6] + [8] \times [7] = 13 \times 8 + 21 \times 13 = 377,$$

$$[15] = [7 \times 2 + 1] \text{ より},$$

$$[15] = [7] \times [7] + [8] \times [8] = 13 \times 13 + 21 \times 21 = 610,$$

$$[16] = 377 + 610 = 987$$

よって、

$$[30] = [15] \times [14] + [16] \times [15] = 610 \times 377 + 987 \times 610 \\ = (377 + 987) \times 610 = 832040 \text{ です。}$$