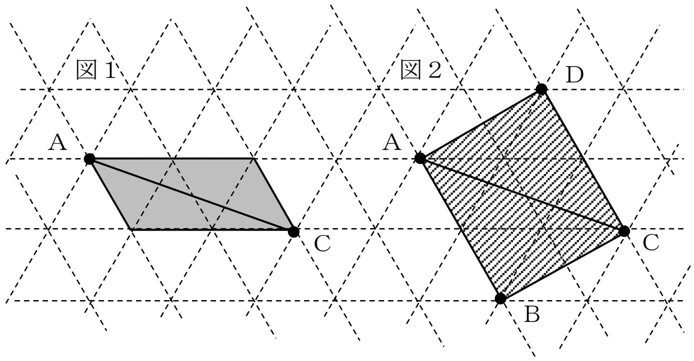
受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

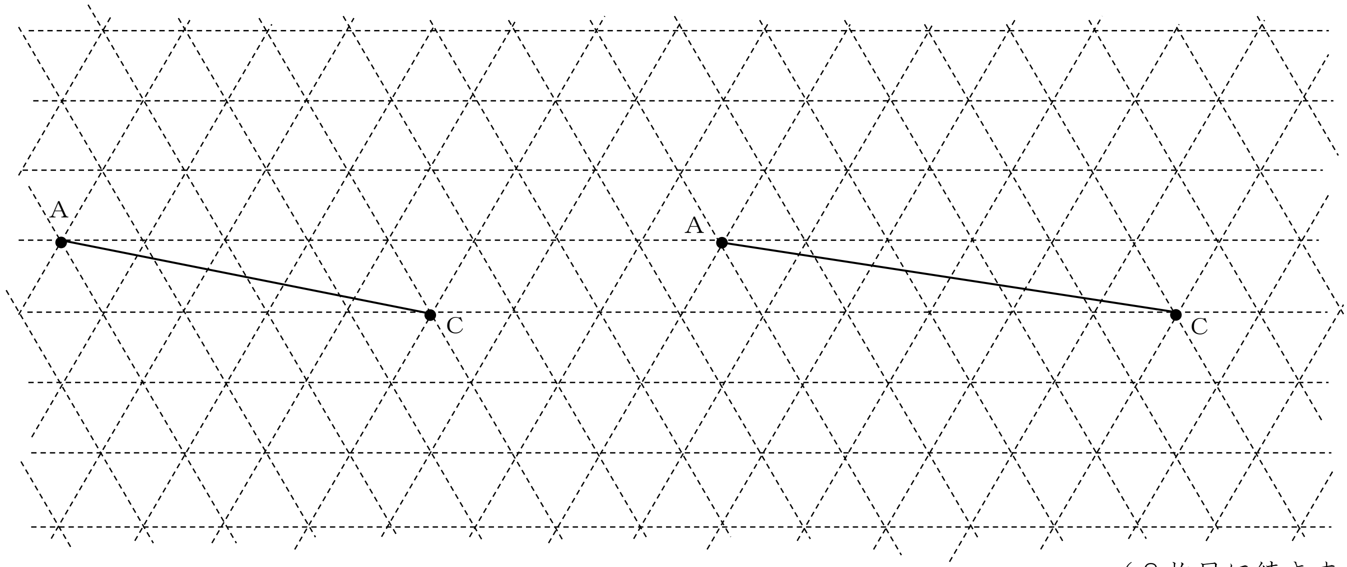
正三角形のマス目における長方形

１辺が１㎝の正三角形を並べたマス目があり，正三角形の頂点を結んで四角形を作ります。図１のまっすぐな線ＡＣを対角線とする最も小さい平行四辺形は，辺の長さが１㎝と２㎝です。このとき，まっすぐな線ＡＣを「(１，２) の線」とよぶことにします。ＡＣが（１，２）の線のとき，ＡＣを対角線とする長方形ＡＢＣＤは図２のようになります。



（１）ＡＣが（１，４）の線のとき，ＡＣを対角線とする長方形ＡＢＣＤを図にかきなさい。また，その面積が，１辺１㎝の正三角形の面積の何倍であるかを求めなさい。

（２）ＡＣが（１，５）の線のとき，ＡＣを対角線とする長方形ＡＢＣＤを図にかきなさい。また，その面積が，１辺１㎝の正三角形の面積の何倍であるかを求めなさい。

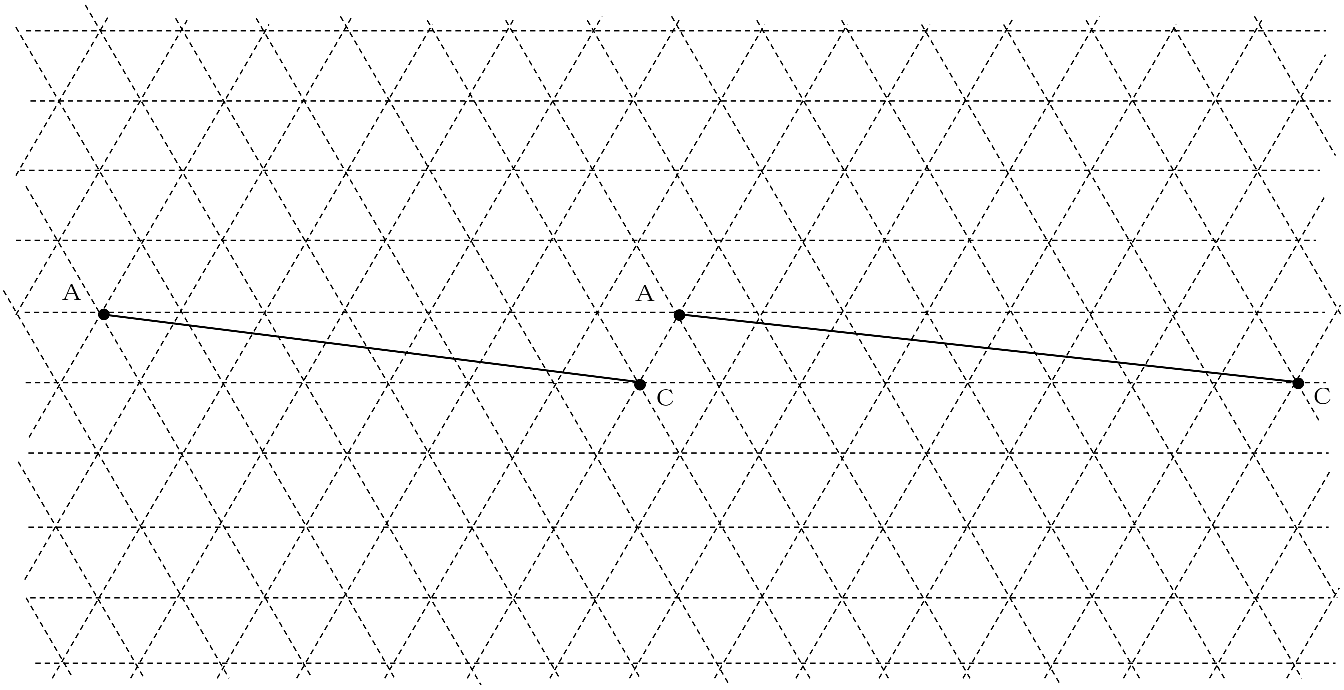


（２枚目に続きます）

最難関問題

（３）ＡＣが（１，６）の線のとき，ＡＣを対角線とする長方形ＡＢＣＤを図にかきなさい。また，その面積が，１辺１cmの正三角形の面積の何倍であるかを求めなさい。

（４）ＡＣが（１，７）の線のとき，ＡＣを対角線とする長方形ＡＢＣＤを図にかきなさい。また，その面積が，１辺１cmの正三角形の面積の何倍であるかを求めなさい。



（５）ＡＣが（１，Ｎ）の線のとき，ＡＣを対角線とする長方形ＡＢＣＤの面積が１辺１cmの正三角形の面積の９６０倍になりました。Ｎにあてはまる整数をすべて答えなさい。

最難関問題

正三角形のマス目における長方形（１）図…図５参照，面積…２４倍　（２）図…図７参照，面積…２４倍
（３）図…図９参照，面積…４８倍（４）図…図１１参照，面積…４８倍
（５）３０，３１

（１）長方形の２本の対角線の，・長さが等しい，・互いの中点で交わる，という性質を利用します。
（１，４）の線ＡＣを対角線とする平行四辺形は図３のようになります。ＡＣの中点がある中央のひし形に注目をして，それと合同な平行四辺形を作り，対角線ＢＤを引きます。４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄを結ぶと，図４のようになります。

図３

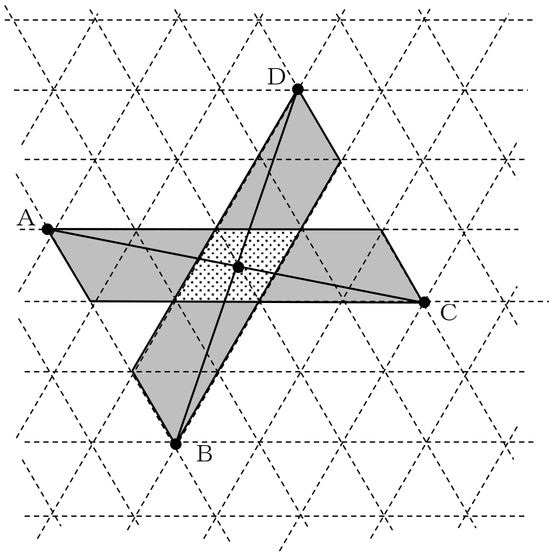


図４

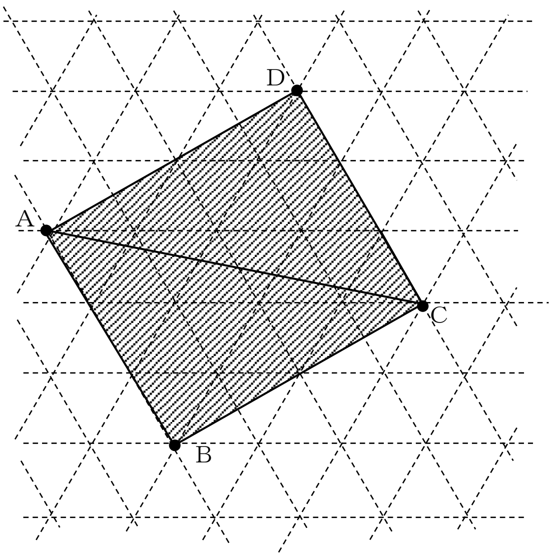


図４の長方形は，ＡＢの長さが１辺１㎝の正三角形の底辺の３倍，ＢＣの長さが１辺１㎝の正三角形の高さの４倍ですから，３×４×２＝２４より，面積は２４倍です。

最難関問題

（２）（１，５）の線ＡＣを対角線とする平行四辺形は図５のようになります。ＡＣの中点がある中央のひし形に注目をして，それと合同な平行四辺形を作り，対角線ＢＤを引きます。４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄを結ぶと，図６のようになります。

図５

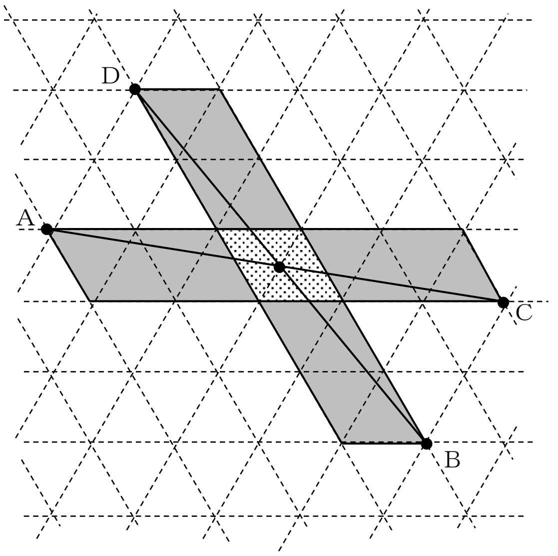


図６

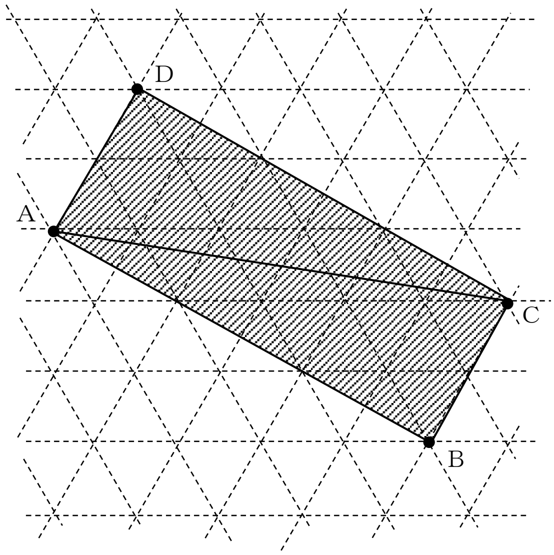


図６の長方形は，ＡＤの長さが１辺１㎝の正三角形の底辺の２倍，ＡＢの長さが１辺１㎝の正三角形の高さの６倍ですから，２×６×２＝２４より，面積は２４倍です。

最難関問題

（３）（１，６）の線ＡＣを対角線とする平行四辺形は図７のようになります。ＡＣの中点がある中央のひし形に注目をして，それと合同な平行四辺形を作り，対角線ＢＤを引きます。４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄを結ぶと，図８のようになります。

図７

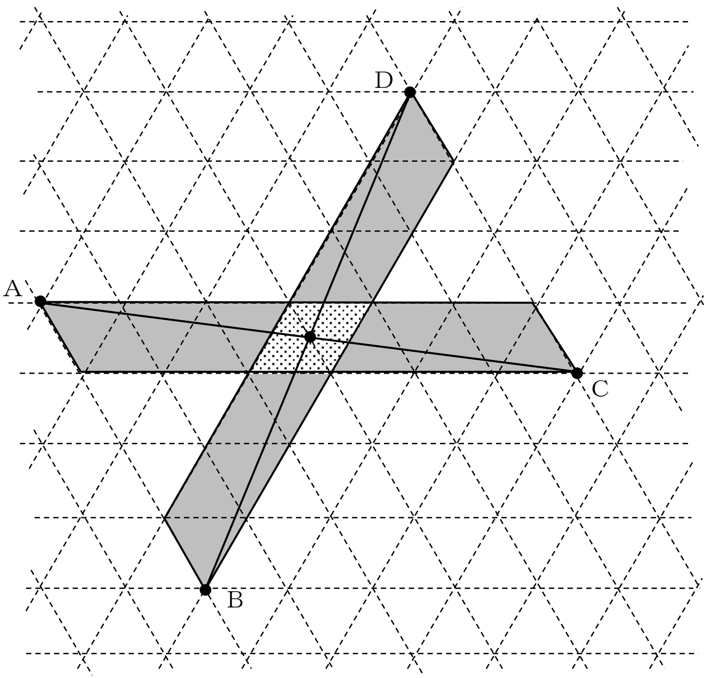


図８

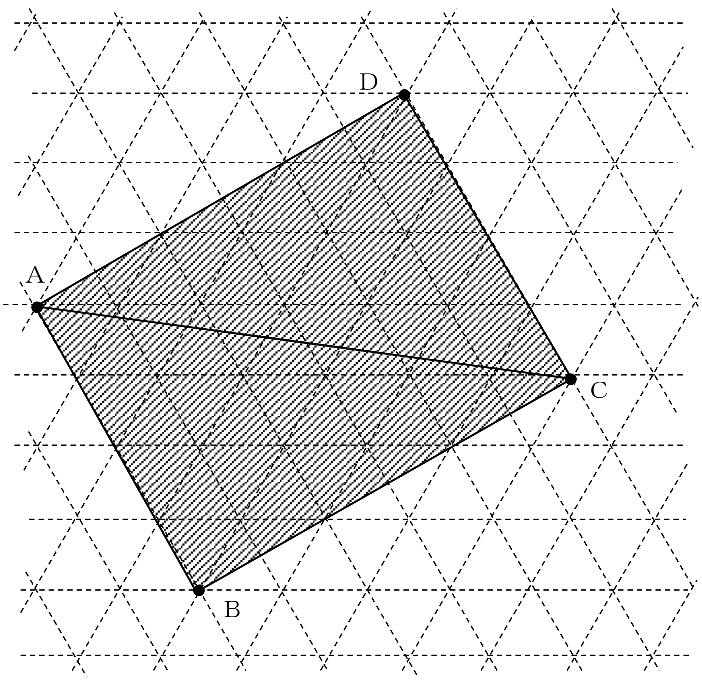


図８の長方形は，ＡＢの長さが１辺１㎝の正三角形の底辺の４倍，ＢＣの長さが１辺１㎝の正三角形の高さの６倍ですから，４×６×２＝４８より，面積は４８倍です。

最難関問題

（４）（１，７）の線ＡＣを対角線とする平行四辺形は図９のようになります。ＡＣの中点がある中央のひし形に注目をして，それと合同な平行四辺形を作り，対角線ＢＤを引きます。４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄを結ぶと，図１０のようになります。

図 9

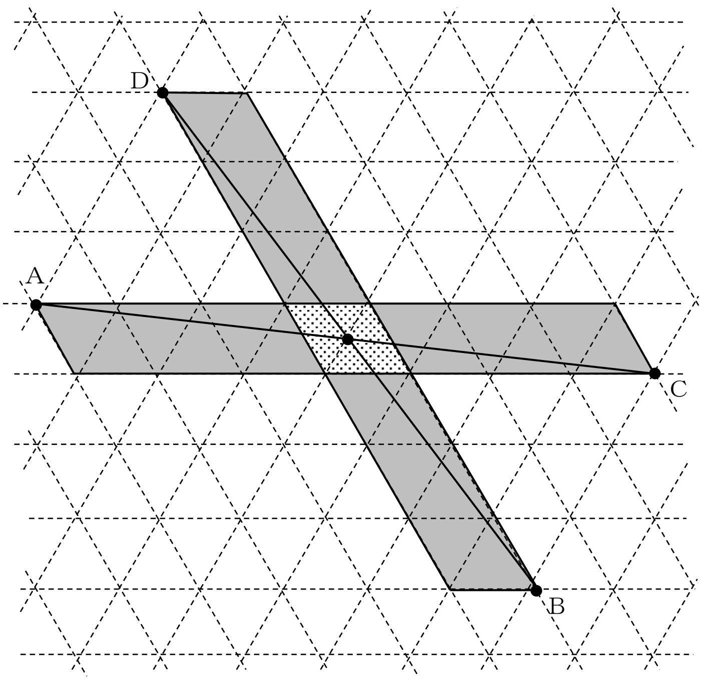


図 10

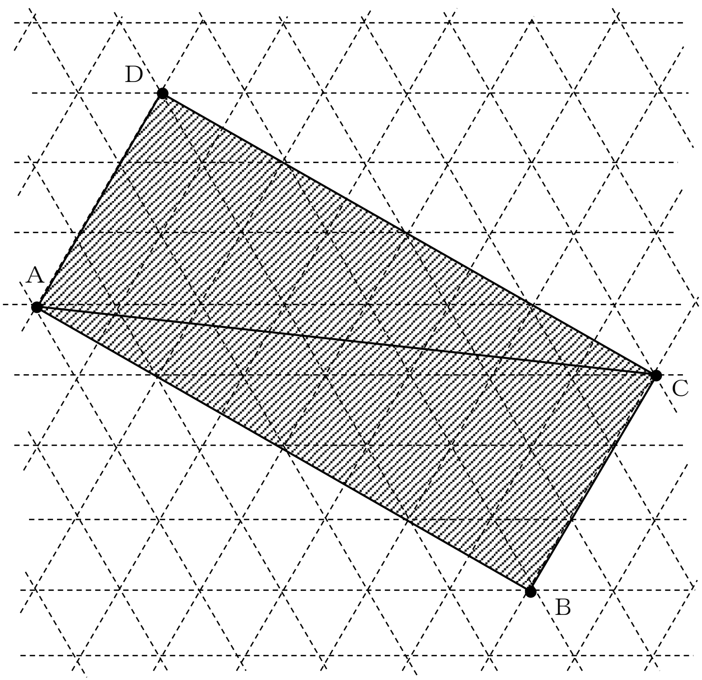
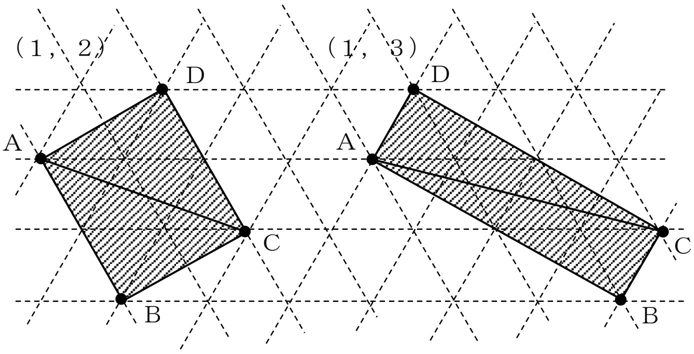


図１０の長方形は，ＡＤの長さが１辺１㎝の正三角形の底辺の３倍，ＡＢの長さが１辺１㎝の正三角形の高さの８倍ですから，３×８×２＝４８より，面積は４８倍です。

最難関問題

（５）（１，４）から（１，７）の線ＡＣを対角線とする長方形の面積についてここまで見てきました。さらに，（１，２），（１，３）の場合を考えます。



（１，２）の線ＡＣを対角線とする長方形は，ＡＢの長さが１辺１㎝の正三角形の底辺の２倍，ＢＣの長さが１辺１㎝の正三角形の高さの２倍ですから，２×２×２＝８より，面積は８倍です。
（１，３）の線ＡＣを対角線とする長方形は，ＡＤの長さが１辺１㎝の正三角形の底辺の１倍，ＡＢの長さが１辺１㎝の正三角形の高さの４倍ですから，１×４×２＝８より，面積は８倍です。

以上をもとにして，（１，Ｎ）のＮが偶数の場合と奇数の場合にわけて考えましょう。

Ｎが偶数の場合

底辺，高さ，長方形の面積についてまとめると，次のようになります。

対角線ＡＣ	底辺（倍）	高さ（倍）	長方形の面積（倍）
（１，２）	2	2	8
（１，４）	3	4	２４
（１，６）	4	6	４８
…	…	…	…
（１，ｍ×２）	ｍ＋１	ｍ×２	（ｍ×ｍ＋ｍ）×４

Ｎが奇数の場合

底辺，高さ，長方形の面積についてまとめると，次のようになります。

対角線ＡＣ	底辺（倍）	高さ（倍）	長方形の面積（倍）
（１，３）	1	4	8
（１，５）	2	6	２４
（１，７）	3	8	４８
…	…	…	…
（１，ｍ×２＋１）	ｍ	ｍ×２＋２	（ｍ×ｍ＋ｍ）×４

最難関問題

　このように，２と３，４と５，６と７のような，連続する偶数（ｍ×２）と奇数（ｍ×２＋１）の場合，長方形の面積はどちらも（ｍ×ｍ＋ｍ）×４となります。ここまで求めてきた長方形の面積が８＝８×１，２４＝８×３，４８＝８×６というように8の倍数になっていることに注目して，（ｍ×ｍ＋ｍ）×４＝８×（ｍ×ｍ＋ｍ）÷２とすると，８×（ｍ×ｍ＋ｍ）÷２＝８×（ｍ＋１）×ｍ÷２となります。（ｍ＋１）×ｍ÷２＝（１＋ｍ）×ｍ÷２は，（始めの数＋終わりの数）×個数÷２という，１からｍまでの整数の和を求める式になっています。つまり，８＝８×１，２４＝８×（１＋２），４８＝８×（１＋２＋３）という，‘８×三角数’によって，長方形の面積を求めることができます。

　９６０＝８×１２０で，１２０＝（１＋ｍ）×ｍ÷２より２４０＝（１＋ｍ）×ｍを満たす１＋ｍとｍの組をさがすと１６と１５ですから，ｍ＝１５です。よって，ｍ×２＝１５×２＝３０，ｍ×２＋１＝１５×２＋１＝３１より，Ｎ＝３０，３１です。