受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

Ｎ進法とは異なる位取り・２

図１のような,斜面に沿ってビー玉を転がして穴に落とすことによってビー玉の数を数える装置があります。最初の穴には１個，次の穴には１０個，続いて１００個，１０００個，１００００個，…のビー玉が入ります。穴がビー玉でいっぱいになると，次のビー玉は１つ先の穴に落ちます。

例えば６０００個のビー玉を転がすと,まず図２のようになります。このとき,いっぱいになった穴から,底を開けてビー玉を下に落とします。そして，いっぱいにならなかった穴のビー玉を取り出して，再び斜面を転がします。これを何回も繰り返し，すべてのビー玉を下に落とします。最後に，それぞれの穴の底を開けた回数によって,ビー玉の個数を表します。６０００個の場合，１００００以上の穴の底は一度も開かず，１０００の穴は５回，１００と１０の穴は９回，１の穴は１０回開くので，$\boxed{5}\ \boxed{9}\ \boxed{9}\ \boxed{10}$となります。

図１

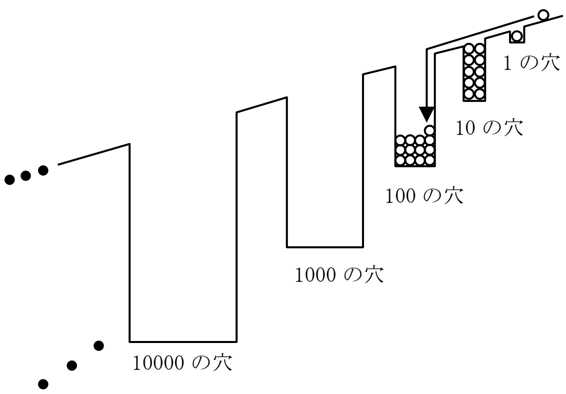
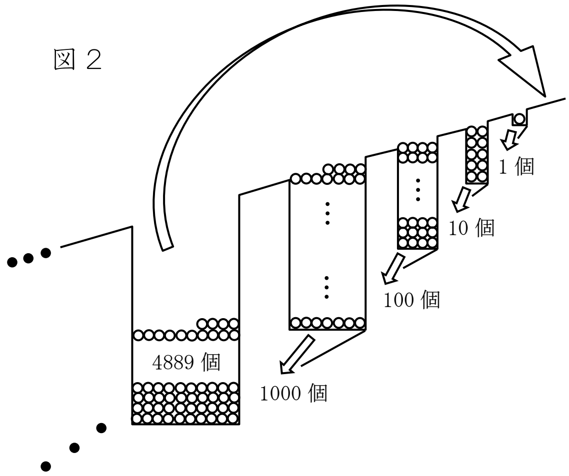


図２



また，ビー玉の数が１２個であることを，この装置は$\boxed{1}\ \boxed{2}$と表します。このように，装置による個数の表し方が普通の数の表し方と一致する場合について，以下の問いに答えなさい。ただし，例えば５９９１０と$\boxed{5}\ \boxed{9}\ \boxed{9}\ \boxed{10}$は一致しない表し方と考えます。また，ビー玉が０個の場合も装置による個数の表し方と普通の数の表し方は一致するものと考えます。

（１）ビー玉が９９個以下のとき，装置による個数の表し方が普通の数の表し方と一致する場合は何通りありますか。

（２）装置による個数の表し方が普通の数の表し方と一致するのは，どのような場合ですか。簡単に説明しなさい。

（２枚目に続きます）

（３）ビー玉が９９９９９個以下のとき，装置による個数の表し方が普通の数の表し方と一致する場合は何通りありますか。

（４）装置による個数の表し方が普通の数の表し方と一致する場合を０から順に数えていった場合，４１７２番目に一致するのはビー玉が何個のときですか。

Ｎ進法とは異なる位取り・２

（１）５５通り

（２）「下の位の数が上の位の数と同じかより大きい場合」，
　　「上の位の数が下の位の数と同じかより小さい場合」，など

（３）２００２通り　（４）３３４４５５個

（１）数の普通の表し方＝１０進法の表し方に注目して場合分けをします。

〇０～９

装置の１の穴しか使われないので，表し方は$\boxed{0}$～$\boxed{9}$となってすべて一致します。よって１０通りです。

〇１０～１９

１０は$\boxed{1}$ $\boxed{0}$ではなくて$\boxed{10}$と表されるので，一致しません。１１は$\boxed{1}$ $\boxed{1}$，１２は$\boxed{1}$ $\boxed{2}$，…，１９は$\boxed{1}$ $\boxed{9}$と表されるので一致します。よって９通りです。

〇２０～２９

２０は$\boxed{1}$ $\boxed{10}$，２１は$\boxed{1}$ $\boxed{11}$と表されるので，一致しません。２２は$\boxed{2}$ $\boxed{2}$，…，２９は$\boxed{2}$ $\boxed{9}$と表されるので一致します。よって８通りです。

以降も同様にして，一致するのは，３３～３９，４４～４９，５５～５９，６６～６９，７７～７９，８８～８９，９９です。全部で，１０＋９＋８＋７＋６＋５＋４＋３＋２＋１＝５５（通り）です。

（２）（１）で求めた０～９，１１＝１９，２２～２９，３３～３９，４４～４９，５５～５９，６６～６９，７７～７９，８８～８９，９９は，すべて下の位の数が上の位の数と同じか，より多くなっています。

例えば４けたの整数４４７９は，４４７９＝１１１１×４＋１１×３＋１×２より，$\boxed{4}$ $\boxed{4}$ $\boxed{7}$ $\boxed{9}$と表すことができます。それに対し，４４７６は，４４７６＝１１１１×４＋１１×２＋１×１０より，$\boxed{4}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ $\boxed{10}$となって装置による個数の表し方が１０進法の数の表し方と一致しません。よって，「下の位の数が上の位の数と同じかより大きい場合」，「上の位の数が下の位の数と同じかより小さい場合」などが答えとなります。

（３）例えば１，１，３，６，７の５つの数を並びかえてできる５けたの整数のうち，１０進法と装置の表し方が一致するのは，（２）より１１３６７のみです。このように，整数に現れる数字を決めれば，並び方は自動的に決まるので考える必要がありません。ここで，０は００００００，１２３は００１２３と考えることにすると，ちょうど５個の数字を選べばよいことになります。ここで，０００００は１種類の数字を選んだ場合，００１２３は４種類の数字を選んだ場合というように，選んだ数字の種類に応じて場合分けを行います。

〇５種類

０～９までの１０個の数字から５個を選べばよいので，

$_{10}C_5=\dfrac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}=252$（通り）です。

〇４種類

４個の数字の選び方が，$_{10}C_4=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$（通り），４個の数字うちで２回現れる数を選ぶ方法が４通りありますから，２１０×４＝８４０（通り）です。

〇３種類

３個の数字の選び方が，$_{10}C_3=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$（通り）あります。選んだ３個の数字の現れ方は，３回・１回・１回の場合と２回・２回・１回の場合がそれぞれ３通りなので，

１２０×３×２＝７２０（通り）です。

〇２種類

２個の数字の選び方が，$_{10}C_2=\dfrac{10\times9}{2\times1}=45$（通り）あります。選んだ２個の数字の現れ方は，４回・１回の場合と３回・２回の場合がそれぞれ２通りなので，４５×２×２＝１８０（通り）です。

〇１種類

数字を１個を選べばよいので，１０通りです。

以上より，２５２＋８４０＋７２０＋１８０＋１０＝２００２（通り）です。

最難関問題

（４）（３）より，５けた以下の整数の場合に１０進法の表し方と装置の表し方が一致する整数は２００２個あることが分かったので，６けたの整数を順に考えます。６けたの整数の一番上の位は十万の位です。

十万の位が１の場合

最小の整数は１１１１１１で，１１１１１２，１１１１１３，…と続きます。下５けたに現れる数字はすべて１以上なので，１以上の５個の数字の選び方を考えます。

○５種類

１～９までの９個の数字から５個を選べばよいので，

${}_9C_5={}_9C_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$（個）です。

○４種類

４個の数字の選び方が，${}_9C_4=126$（通り），選んだ４個の数字うちで２回現れる数を選ぶ方法が４通りありますから，１２６×４＝５０４（個）です。

○３種類

３個の数字の選び方が，${}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$（通り）あります。選んだ３個の数字の現れ方は，３回・１回・１回の場合と２回・２回・１回の場合がそれぞれ３通りなので，

８４×３×２＝５０４（個）です。

○２種類

２個の数字の選び方が，${}_9C_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$（通り）あります。選んだ２個の数字の現れ方は，４回・１回の場合と３回・２回の場合がそれぞれ２通りなので，３６×２×２＝１４４（個）です。

○１種類

数字を１個を選べばよいので，９個です。

よって，１２６＋５０４×２＋１４４＋９＝１２８７（個）です。

十万の位が２の場合

最小の整数は２２２２２２で，２２２２２３，２２２２２４，…と続きます。下５けたに現れる数字はすべて２以上なので，２以上の５個の数字の選び方を考えます。

○５種類

２～９までの８個の数字から５個を選べばよいので，

${}_8C_5={}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$（個）です。

最難関問題

〇４種類

４個の数字の選び方が，８Ｃ４＝$\dfrac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}$＝７０（通り），選んだ４個の数字うちで２回現れる数を選ぶ方法が４通りありますから，７０×４＝２８０（個）です。

〇３種類

３個の数字の選び方が，８Ｃ３＝$\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}$＝５６（通り）あります。選んだ３個の数字の現れ方は，３回・１回・１回の場合と２回・２回・１回の場合がそれぞれ３通りなので，
５６×３×２＝３３６（個）です。

〇２種類

２個の数字の選び方が，８Ｃ２＝$\dfrac{8\times7}{2\times1}$＝２８（通り）あります。選んだ２個の数字の現れ方は，４回・１回の場合と３回・２回の場合がそれぞれ２通りなので，２８×２×２＝１１２（個）です。

〇１種類

数字を１個を選べばよいので，８個です。

よって，５６＋２８０＋３３６＋１１２＋８＝７９２（個）です。

ここまでで，２００２＋１２８７＋７９２＝４０８１（個）ですから，あと
４１７２－４０８１＝９１（個）です。十万の位が３の整数について，順に考えていきます。

３３３〇△□の場合

３～９までの７個の数字から３個を選ぶと，７Ｃ３＝$\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}$＝３５（個）です。

２個を選ぶと，７Ｃ２＝$\dfrac{7\times6}{2\times1}$＝２１（通り），選んだ２個の数字うちで２回現れる数を選ぶ方法が２通りありますから，２１×２＝４２（個）です。

１個を選ぶと，７個です。

よって，３５＋４２＋７＝８４（個）です。

３３４〇△□の場合

あと９１－８４＝７（個）です。３３４４４□では，□に入る数が４～９の６個です。次にくる数が求める数で，３３４４５５です。

以上より，３３４４５５個です