最難関問題

２０２０の問題・６

１０進法の位取りではどの位も１０ごとに繰り上がるので，位は小さいほうから順に１の位，１×１０＝１０より１０の位，１０×１０＝１００より１００の位，１００×１０＝１０００より１０００の位，…，となります。よって，１０進法の２０２０は１０００が２個と１００が０個と１０が２個と１が０個で，１０００×２＋１００×０＋１０×２＋１×０＝２０２０となります。

位取りの規則を変えて，最初は２，次は３，その次は４で繰り上がるようにすると，位は順に１の位，１×２＝２より２の位，２×３＝６より６の位，６×４＝２４より２４の位となるので，この場合２０２０は２４×２＋６×０＋２×２＋１×０＝５２を表します。

また，最初は３，次は２，その次は４で繰り上がるようにすると，位は順に１の位，１×３＝３より３の位，３×２＝６より６の位，６×４＝２４より２４の位となります。この位取りでは，３の位は２で６の位にくり上がるので，３の位には０か１しか置けません。２０２０は位取りのきまりに反しているので，どんな数も表しません。

（１）上の例のように，３回目までの繰り上がりのみを考えた場合，１０進法とは異なる位取りで，２０２０が２０２０を表すものは何通りありますか。
また，１の位の次の位として考えられるものをすべて答えなさい。

（２）２０２０，２０２１，２０２２，…，と数を１つずつ大きくしていきます。（１）で求めた位取りのうち，一番後まで１０進法と同じ数を表し続ける位取りを，すべて答えなさい。答えるときは，例えば位が１の位から順に，２の位，６の位，２４の位となっている場合は（２４，６，２）と答えなさい。

最難関問題

２０２０の問題・６

（１）２９通り，２の位，５の位，１０の位，１０１の位

（２）(１０００，２００，１０)，(１０００，２５０，１０)，(１０００，５００，１０)

（１）最初は○，次は△，その次は□で繰り上がるとすると，位取りは次のようになります。

○×△×□	○×△	○	1
2	0	2	0

２０２０は○×△×□×２＋○×２＝２×○×（△×□＋１）ですから，

２×○×（△×□＋１）＝２０２０より，○×（△×□＋１）＝２０２０÷２＝１０１０です。ここで，○，□は２以上の整数，△は○の位に２を置けることから３以上の整数ですから，△×□＋１は３×２＋１＝７以上です。この点に注意をして，１０１０を２つの数に積分解します。

$\boxed{１０１０＝２×５０５}$

○＝２，△×□＋１＝５０５ですから，△×□＝５０５－１＝５０４です。

５０４＝２×２×２×３×３×７より，５０４の約数の個数は（３＋１）×（２＋１）×（１＋１）＝２４（個）です。△は３以上ですから１，２ではなく，また，□が２以上であることから５０４でもありません。△がとる値が２４－３＝２１（通り）であることから，位取りも２１通りあります。

これらの位取りは，いずれも１の位の次が２の位になります。一例を示すと次のようになります。

△＝３，□＝１６８	１００８	6	2	1
△＝２１，□＝２４	１００８	４２	2	1
△＝２５２，□＝２	１００８	５０４	2	1

$\boxed{１０１０＝５×２０２}$

○＝５，△×□＋１＝２０２ですから，△×□＝２０２－１＝２０１です。

２０１＝３×６７ですから，次のような位取りが条件を満たします。

△＝３，□＝６７	１００５	１５	5	1
△＝６７，□＝３	１００５	３３５	5	1

よって，２通りです。

最難関問題

１０１０＝１０×１０１

○＝１０，△×□＋１＝１０１の場合と，○＝１０１，△×□＋１＝１０の場合に分かれます。

○＝１０，△×□＋１＝１０１では，△×□＝１０１－１＝１００ですから，次のような位取りが条件を満たします。

△＝４，□＝２５	１０００	４０	１０	１
△＝５，□＝２０	１０００	５０	１０	１
△＝２０，□＝５	１０００	２００	１０	１
△＝２５，□＝４	１０００	２５０	１０	１
△＝５０，□＝２	１０００	５００	１０	１

○＝１０１，△×□＋１＝１０では，△×□＝１０－１＝９ですから，次のような位取りが条件を満たします。

△＝３，□＝３	９０９	３０３	１０１	１

よって，５＋１＝６（通り）です。

以上より，位取りは２１＋２＋６＝２９（通り），１の位の次の位は○の位ですから，２の位，５の位，１０の位，１０１の位です。

最難関問題

（２）まず，〇＝２，５の場合は早々に「脱落」します。〇＝２の場合，１の位には０か１しか置けないので，２０２２が位取りの規則に反してしまいます。同様に，〇＝５の場合，２０２５が位取りの規則に反してしまいます

次に，〇＝１０１の場合，２０２９までは１の位が変わるだけなので問題ありませんが，２０３０が９０９×２＋１０１×３＝２１２１となってしまいます。

残りは，〇＝１０の場合の５通りです。１つずつ見ていきましょう。

△＝４，□＝２５	１０００	４０	１０	1

１０の位には０～３しか置けないので，２０３９までは１０進法と同じ数を表します。

△＝５，□＝２０	１０００	５０	１０	1

１０の位には０～４しか置けないので，２０４９までは１０進法と同じ数を表します。

△＝２０，□＝５	１０００	２００	１０	1
△＝２５，□＝４	１０００	２５０	１０	1
△＝５０，□＝２	１０００	５００	１０	1

１０の位に９まで置くことができるので，２０９９までは１０進法と同じ数を表します。
ただし，２１００になると，それぞれ１０００×２＋２００×１＝２２００，
１０００×２＋２５０×１＝２２５０，１０００×２＋５００×１＝２５００を表すので，１０進法とは一致しなくなります。

以上より，２０９９まで１０進法と一致する，
（１０００，２００，１０），（１０００，２５０，１０），（１０００，５００，１０）が答えです。