受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

連続する３つの単位分数の和

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$，…と分子が１で分母が連続する整数の３つの分数の和を求める式が順に並んでいます。

（１）$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$，$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$，$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}$

を計算した答えをそれぞれ求めなさい。

（２）計算した答えの分子が５４１になる式のうち，最初に現れる式を答えなさい。

（３）計算した答えの分子と分母の差が２４２７１になるような式のうち，最初に現れる式を答えなさい。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

連続する３つの単位分数の和

（１）$\frac{11}{6}$，$\frac{13}{12}$，$\frac{47}{60}$，$\frac{37}{60}$，$\frac{299}{990}$　（２）$\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}$　（３）$\frac{1}{29}+\frac{1}{30}+\frac{1}{31}$

（１）$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{26}{24}=\frac{13}{12}$，$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}$，$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{74}{120}=\frac{37}{60}$

$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}=\frac{299}{990}$です。

（２）$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}$を例にとると，$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}=\frac{10\times11+9\times11+9\times10}{990}$です。ここで分子の計算に注目をすると，２９９は真ん中の数である１０×１０のほぼ3倍になっています。

１０×１１＋９×１０を計算すると，

１０×１１＋９×１０＝１０×（１１＋９）＝１０×２０＝１０×１０×２となります。

また，９×１１は，９×１１＝９×１０＋９×１であり，１０×１０＝１０×９＋１０×１よりは１小さくなるので，９×１１＝１０×１０－１です。こうして，１０×１１＋９×１１＋９×１０は，１０×１０×３－１となります。

同様にして，$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2\times2\times3-1}{6}=\frac{11}{6}$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{3\times3\times3-1}{24}=\frac{13}{12}$，

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{4\times4\times3-1}{60}=\frac{47}{60}$，$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{5\times5\times3-1}{120}=\frac{37}{60}$が成り立っています。

５４１の場合，５４１＋１＝５４２は３の倍数ではないので，５４１×２＋１＝１０８３を考えます。

１０８３÷３＝３６１，３６１＝１９×１９なので，

$\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}=\frac{19\times19\times3-1}{18\times19\times20}=\frac{1082}{18\times19\times20}=\frac{541}{9\times19\times20}$となります。

よって，$\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}$です。

最難関問題

（３）（２）の$\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{19}+\dfrac{1}{20}=\dfrac{19\times19\times3-1}{18\times19\times20}$の計算において，

分母は１８×１９×２０，

分子は，１９×１９×３－１＝１８×１９×３＋１×１９×３－１，

分子と分母の差は，１８×１９×（２０－３）－１×１９×３＋１となるので，

だいたい１７×１８×１９です。「だいたい」なので，１８×１８×１８と考えてもよいでしょう。

　２４２７１については，３０×３０×３０＝２７０００の少し手前であることがすぐにわかるので，

２９×２９×２９を計算すると，２４３８９となります。

$\dfrac{1}{29}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{31}=\dfrac{30\times30\times3-1}{29\times30\times31}=\dfrac{2699}{26970}$は既約分数で，

２６９７０－２６９９＝２４２７１なので，$\dfrac{1}{29}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{31}$が答えとなります。