

## 最難関問題

最も遠い点への最短距離・2

(2) (ア) までは「最も遠い点への最短距離」と全く同じ問題です。

(1) 図1の直角三角形を4個組み合わせて、図2の正方形ABCDを作りました。

(ア) 図3の斜線部分の長方形の面積を求めなさい。

(イ) 図1の $x$ にあてはまる数を求めなさい。

図1

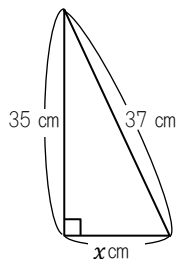


図2

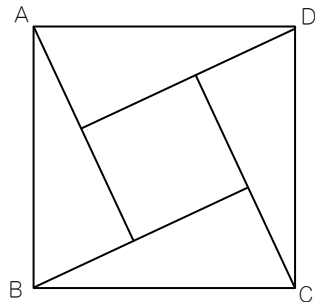
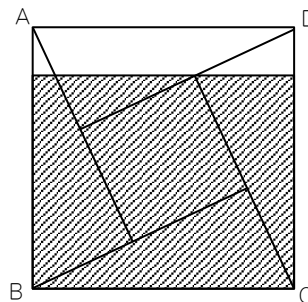


図3



## 最難関問題

(2) 1 辺 4 cm の立方体  $ABCD-EFGH$  の面  $BCGF$  上にある点  $P$  から、立方体の表面をたどって他の面にある点に最短距離で移動します。このとき、最短距離が最も長くなる点  $Q$  を考えます。

(ア) 点  $P$  が図 4 の位置にあるとき、点  $Q$  の位置を図 5 のように解答らんにかきなさい。

図 4

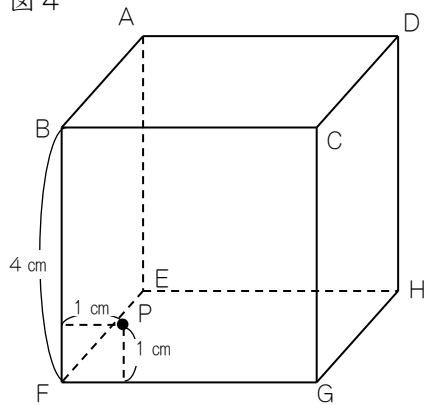
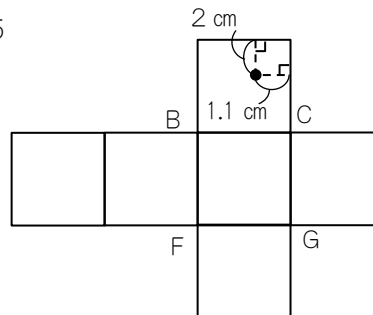
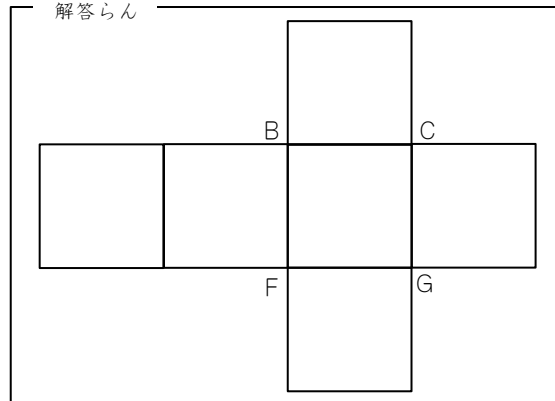


図 5

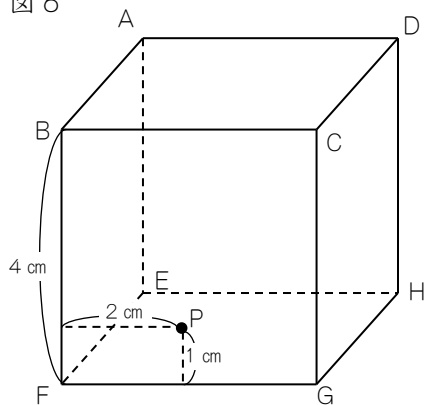


解答らん

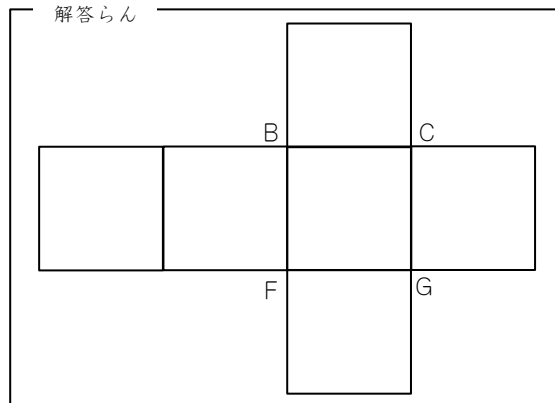


(イ) 点  $P$  が図 6 の位置にあるとき、点  $Q$  の位置をすべて、図 5 のように解答らんにかきなさい。

図 6



解答らん



## 最難関問題

最も遠い点への最短距離

(1) (ア)  $1225 \text{ cm}^2$  (イ)  $x = 12$

(2) (ア) (イ) 解説参照

(1) この問題は過去作の「ピタゴラスの定理の証明法」と同内容です。

(ア) 図①のように点E～Jをきめると、長方形BCFEの面積は、

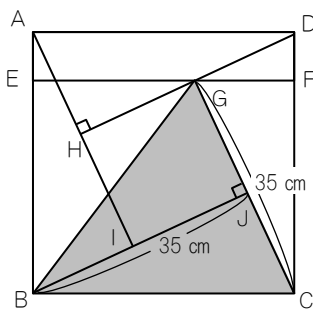
$$35 \times 35 \times \frac{1}{2} \times 2 = 1225 \text{ (cm}^2\text{)} \text{ です。}$$

(イ) 長方形AEFDの面積は、 $37 \times 37 - 35 \times 35 = 144 \text{ (cm}^2\text{)}$  です。図②のように

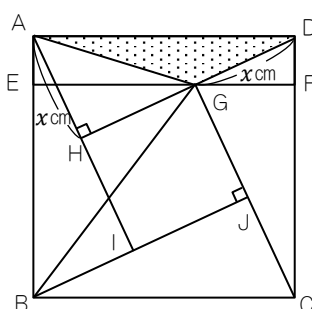
$$\text{長方形AEFDの面積は、} x \times x \times \frac{1}{2} \times 2 = x \times x = 144 \text{ となるので、} x = 12 \text{ です。}$$

こうして、図③のように直角三角形において、直角をはさむ2辺の長さをそれぞれ自分とかけあわせた平方数の和は、のこる1辺を自分とかけあわせた平方数に等しくなります（ピタゴラスの定理）。

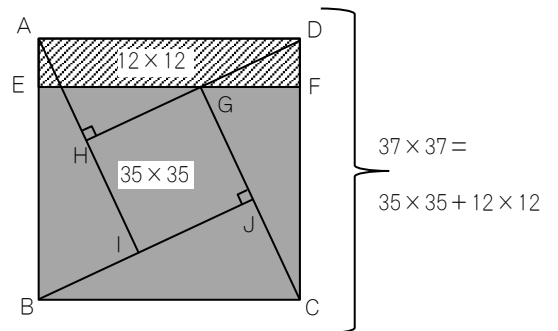
図①



図②



図③



## 最難関問題

(2)

(ア) 点Qは明らかに面A E H D上にあります。点Pから面A E H Dへの最短ルートとして、まず、面B F G Cと面A E H Dの間に1つの面を通過する4通りを考えます。面A E H Dを中心に立方体を展開した図④において、4通りの経路に応じて、点PをP 1～P 4に分けると、P 1とP 2から等距離にある点は、まっすぐな線P 1 P 2の垂直二等分線L 1上にあります。同様に、P 3とP 4から等距離にある点は、まっすぐな線P 3 P 4の垂直二等分線L 2上にあります。L 1とL 2の交点である点Kが点Qであるかを考えます。点Kは、図⑤のように4点P 1～4から等距離にあります。

点Kによって、面A D H Eを4つの三角形K D H, K H E, K E A, K A Dに分けて、点Qが点Kではなくて、いずれかの三角形の内部にある可能性を考えます。三角形K D Hの内部に点Qがある場合を図⑥において考えます。

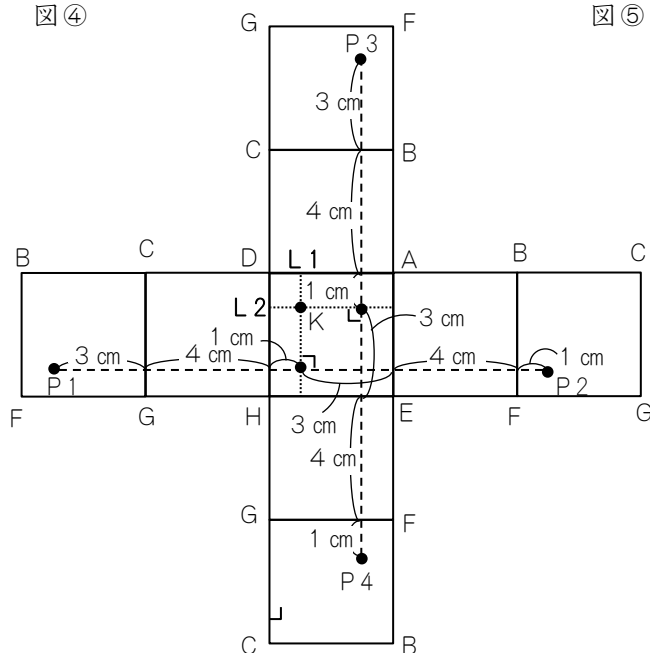
P 1から点Kまでの距離を $x$ とすると、 $x \times x = 8 \times 8 + 2 \times 2 = 68$ ,

P 1から点Dまでの距離を $x$ とすると、 $x \times x = 7 \times 7 + 3 \times 3 = 58$ ,

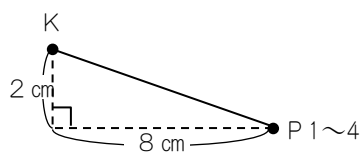
P 1から点Hまでの距離を $x$ とすると、 $x \times x = 7 \times 7 + 1 \times 1 = 50$ ,

となるので、3点K, D, Hを比べると、点KがP 1から最も遠い点になります。ここで、P 1を中心として円周上に点Kがある円の一部分をかくと、辺K D, K Hは円周より内側を通過するので、三角形K D Hは円の内部に収まります。よって、点Qが点Kを除く三角形K D Hの内部に存在することはありません。三角形K H Eと点P 4, 三角形K E Aと点P 2, 三角形K A Dと点P 3についても同様なので、点Qと点Kは重なります。

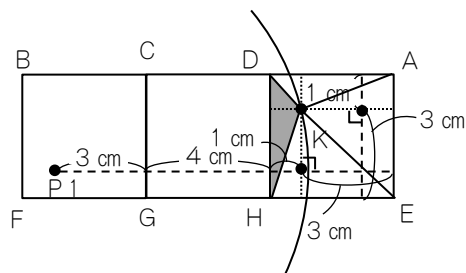
図④



図⑤



図⑥

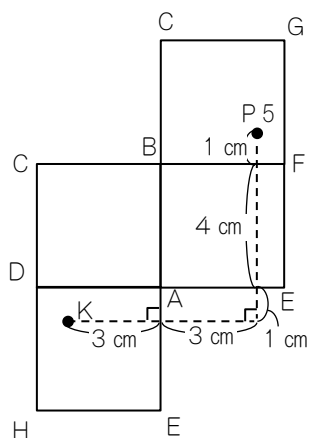


## 最難関問題

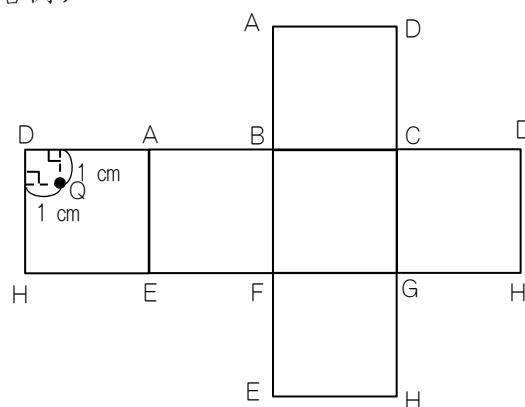
面 B F G C と面 A E H D の間に 2 つ以上の面を通過する場合は, 例えば 2 面を通過するときは図⑦が最短となります。このとき, P 5 から点 K までの距離を  $x$  とすると,  $x \times x = 6 \times 6 + 6 \times 6 = 72$  となるので, 距離はより長くなります。3 面以上の場合も同様です。

よって, 右下の図が解答例になります。点 Q の位置が < 解答例 > と同じであれば正解です。

図⑦



< 解答例 >



## 最難関問題

(イ)

(ア)と同様に、面A E H Dを中心に立方体を展開して考えます。図⑧のように4通りの経路に応じて点PをP 1～P 4に分け、P 1 P 2の垂直二等分線をL 1、P 3 P 4の垂直二等分線をL 2とし、その交点をKとします。L 1はP 3とP 4を結ぶ線と重なります。

点KからP 1、P 2までの距離を $x$ とすると、 $x \times x = 8 \times 8 + 2 \times 2 = 68$ です。一方、点KからP 3、P 4までの距離は8 cmなので、 $8 \times 8 = 64$ であることから、このままではP 3、P 4を通る経路の方が短くなります。そこで、点KからL 2上を左右に動かして、最も短い経路を長くできないかを考えます。点Kから左に $y$  cm動かした点をRとします。

点RからP 3、P 4までの距離を $v$ とすると、 $v \times v = 8 \times 8 + y \times y$ 、

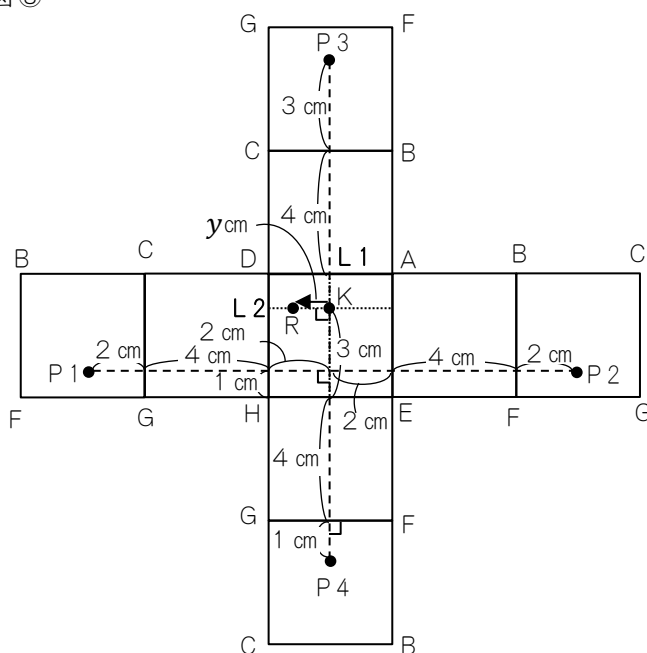
点RからP 1までの距離を $w$ とすると、 $w \times w = (8 - y) \times (8 - y) + 2 \times 2$ です。

この2つが等しくなるとき、

$$8 \times 8 + y \times y = (8 - y) \times (8 - y) + 2 \times 2$$

より、 $64 + y \times y = 68 - 16 \times y + y \times y$ となるので、 $16 \times y = 4$ 、 $y = 0.25$ です。よって、点KからL 2上を左に0.25 cm動かした点をQ 1とすると、 $Q 1 P 1 = Q 1 P 3 = Q 1 P 4$ となります。同様に、点Kから右に0.25 cm動かした点をQ 2とすると、 $Q 2 P 2 = Q 2 P 3 = Q 2 P 4$ となります。

図⑧



## 最難関問題

点  $Q_1$ 、 $Q_2$  から、最も近い  $P_1 \sim P_4$  までの距離を  $z$  とすると、

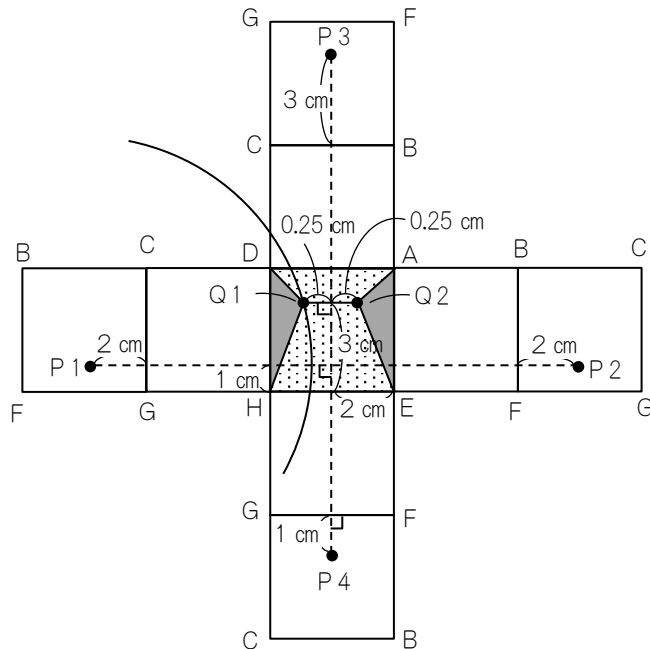
$z \times z = 8 \times 8 + 0.25 \times 0.25 = 64 \frac{1}{16}$  です。(ア) 同様に、点  $Q_1$ 、 $Q_2$  以外に、これより最短距離が長くなる点がないことを確かめます。

図⑨のように面  $ADHE$  を4つの部分に分けます。三角形  $Q_1DH$  は、 $P_1$  を中心として  $Q_1$  を通る円の内部に収まります。同様に、三角形  $Q_2AE$  は  $P_2$  を中心とする円、四角形  $DAQ_2Q_1$  は  $P_3$  を中心とする円、四角形  $HEQ_2Q_1$  は  $P_4$  を中心とする円の内部に収まります。

したがって、面  $ADHE$  上の  $Q_1$ 、 $Q_2$  以外のどの点を選んでも、 $P_1 \sim P_4$  の少なくとも1点までの距離は  $z$  より短くなります。また、面  $BFGC$  と面  $AEDH$  の間に2つ以上の面を通過する場合も、(ア)と同様に展開図を調べるとこれより長くなります。よって、最短距離が最も長くなる点  $Q$  は  $Q_1$ 、 $Q_2$  の2点です。

よって、次の図が解答例になります。点  $Q$  を2点とも正しい位置にかけていれば正解です。

図⑨



< 解答例 >

