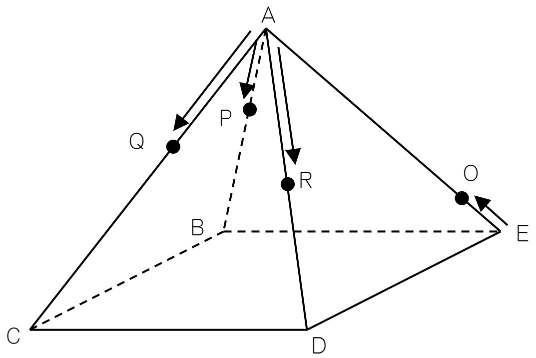
最難関問題

四角すいとシャドウ

　全ての辺の長さが６０㎝の四角すいＡ－ＢＣＤＥがあります。動く点Ｏ，Ｐ，Ｑ，Ｒがあり，
点Ｏは辺ＥＡ上を頂点ＥからＡに向けて秒速２㎝の速さで，
点Ｐは辺ＡＢ上を頂点ＡからＢに向けて秒速３㎝の速さで，
点Ｑは辺ＡＣ上を頂点ＡからＣに向けて秒速４㎝の速さで，
点Ｒは辺ＡＤ上を頂点ＡからＤに向けて秒速５㎝の速さで，同時に出発します。



　出発した後で，４点Ｏ，Ｐ，Ｑ，Ｒが初めて１つの平面上に並ぶのは，何秒後ですか。

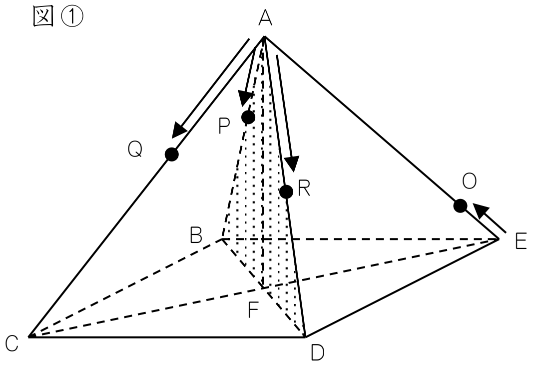
最難関問題

四角すいとシャドウ　$10\frac{40}{47}$秒後

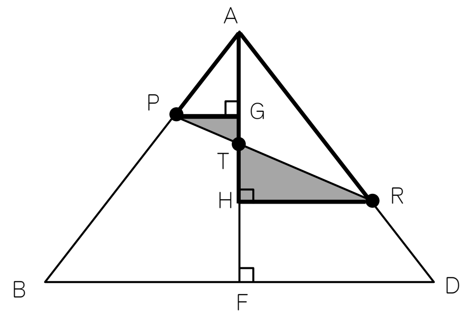
平面は，その上にある３つの点を決めることで定まります。以下では，３点Ｐ，Ｑ，Ｒを通過する平面を考えます。この平面と四角すいの辺ＡＥが交わる点をＳ（シャドウ）とすると，点Ｓと点Ｏが重なるときに，４点Ｏ，Ｐ，Ｑ，Ｒは１つの平面上に並びます。

まず，図①においてあみ目で示した三角形ＡＢＤに注目します。図②のように点Ｇ，Ｈ，Ｔをきめると，ＡＰとＡＲの長さの比は３：５なので，太線で囲った三角形ＡＰＧと三角形ＡＲＨは３：５の相似です。よって，ＰＧとＲＨの長さの比も３：５となるので，影をつけた三角形ＰＴＧとＲＴＨも３：５の相似です。ここで，ＡＧの長さを３とするとＡＨの長さは５であり，ＧＴの長さは（５－３）$\times\frac{3}{3+5}=\frac{3}{4}$となるので，ＡＴの長さは$3+\frac{3}{4}=3\frac{3}{4}$です。

図①



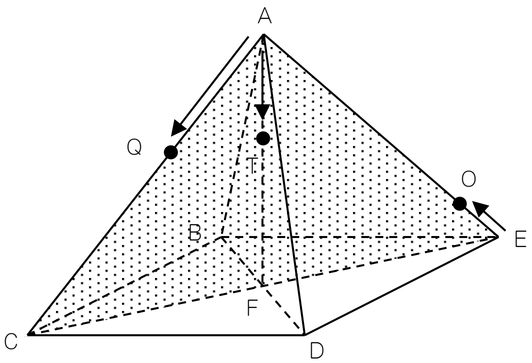
図②



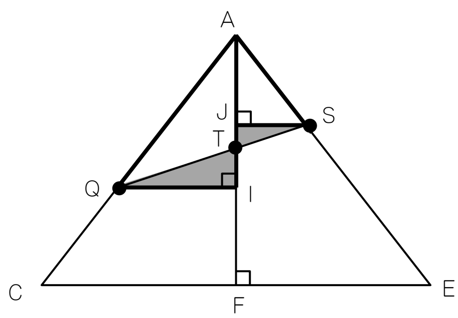
最難関問題

次に，図③においてあみ目で示した三角形ＡＣＥに注目します。点Ｓが図④のようにＱＴの延長線と辺ＡＥの交わる点となります。また，点Ｉ，Ｊを図のようにきめると，ＡＴの長さが$3\frac{3}{4}$のときＡＩの長さは４であり，その比は１５：１６です。ここで，太線で囲った三角形ＡＱＩとＡＳＪ，影をつけた三角形ＱＴＩとＳＴＪの相似に注目をすると，ＡＩ：ＡＪ＝ＱＩ：ＳＪ＝ＩＴ：ＪＴとなります。
ＡＩ：ＡＪ＝ＩＴ：ＪＴであり，ＡＩ：ＩＴ＝１６：（１６－１５）＝１６：１であることから，
ＡＪ：ＪＴも１６：１なので，ＡＪの長さは$3\frac{3}{4}\times\frac{16}{16+1}=\frac{60}{17}$です。よって，ＡＱ：ＡＳ＝４：$\frac{60}{17}$となり，点Ｓの速さは秒速$\frac{60}{17}$cmとなります。

図③



図④



点Ｓと点Ｏが重なるとき４点Ｏ，Ｐ，Ｑ，Ｒは１つの平面上に並ぶので，

$60\div\left(\frac{60}{17}+2\right)=10\frac{40}{47}$（秒後）です。