

N進法の位の数の指定

1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, …のように、各位の数が0~4のいずれかである整数を並べ、小さいほうからn番目の数を $\langle n \rangle$ で表します。 $\langle 1 \rangle = 1$ ,  $\langle 5 \rangle = 10$ ,  $\langle 12 \rangle = 22$ です。

- (1)  $\langle n \rangle = 2304$ のように、 $\langle n \rangle$ の百の位が3となるようなnのうちで最も小さい整数と、小さいほうから99番目の整数を答えなさい。
- (2)  $\langle n \rangle$ の百の位が3で一の位が1となるようなnのうちで小さいほうから99番目の整数を答えなさい。
- (3)  $\langle n \rangle$ の百の位が3で一の位が1となるようなnを35で割ったところ、余りが1になりました。このようなnのうちで最も小さい整数と、小さいほうから99番目の整数を答えなさい。

N進法の位の数の指定 (1) 75, 474 (2) 2466 (3) 17326

(1) 0~4の数字だけで整数を表すので、5進法の問題として考えることができます。 $\langle n \rangle = 2304$ を例にとると、5進法の2304を10進法に直すことになるので、

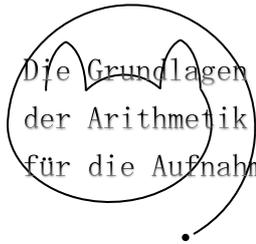
$$n = 5 \times 5 \times 5 \times 2 + 5 \times 5 \times 3 + 5 \times 0 + 1 \times 4 = 329 \text{ です。}$$

また、 $\langle 333 \rangle$ の値を求めることは、10進法を5進法に直すことにあたるので、 $333 = 125 \times 2 + 25 \times 3 + 5 \times 1 + 1 \times 3$ より、 $\langle 333 \rangle = 2313$ です。

$\langle n \rangle$ の百の位が3となるということは、5進法の25の位が3であるということです。最小の場合は、 $\langle n \rangle = 300$ で、 $n = 25 \times 3 = 75$ です。また、3けたの $3\triangle\blacktriangle$ の整数は、 $\triangle$ と $\blacktriangle$ にあてはまる数がどちらも0~4の5通りなので、 $5 \times 5 = 25$ (個)あることから、 $99 \div 25 = 3$ 余り24より、千の位は0, 1, 2, 3の3, 十の位と一の位は5進法で24を表して44なので、3344です。 $\langle n \rangle = 3344$ より、 $n = 125 \times 3 + 25 \times 3 + 5 \times 4 + 1 \times 4 = 474$ です。

(2)  $\square 3\triangle 1$ の $\triangle$ にあてはまる数は0~4の5通りあるので、 $99 \div 5 = 19$ 余り4より、

$\square 331$ という形の整数です。5進法の331を10進法に直すと $25 \times 3 + 5 \times 3 + 1 = 91$ であり、商の19は $\square 331$ という形の整数の20番目ということなので、 $n = 125 \times (20 - 1) + 91 = 2466$ です。



最難関問題

(3)  $\square 3 \triangle 1$  は、 $3 \triangle 1$  が 10 進法では  $75 + 1 + 5 \times 0 \sim 4$  なので、 $76, 81, 86, 91, 96$  にあたり、 $\square$  の部分は 10 進法に直すと 125 の倍数になるので、 $n$  は、125 の倍数 + ( $76, 81, 86, 91, 96$ ) にあたります。これらを 35 で割った剰余は以下のように、それぞれ 5 ずつと、 $125 \div 35 = 3$  余り 20 より 20 ずつ増える (ただし 35 を越えると 35 引き算される) 周期になります。

	0	125	250	$125 \times 3$	$125 \times 4$	$125 \times 5$	$125 \times 6$	$125 \times 7$	...
$\div 35$ の余り	0	20	5	25	10	30	15	0	...

	76	81	86	91	96
$\div 35$ の余り	6	11	16	21	26

この周期を利用すると、例えば  $125 \times 4 + 96$  は、 $10 + 26 = 36$ 、 $36 - 35 = 1$  より、35 で割った余りが 1 であるとわかります。このようにして 35 で割った剰余が 1 となる 125 の倍数と ( $76, 81, 86, 91, 96$ ) の組み合わせを調べると、次のようになります。

	0	125	250	$125 \times 3$	$125 \times 4$	$125 \times 5$	$125 \times 6$	$125 \times 7$	...
$\div 35$ の余り	0	20	5	25	10	30	15	0	...
	なし	86	なし	81	96	76	91	なし	...

条件を満たす整数は  $125 \times 6$  までの周期中に 5 個あるので、 $99 \div 5 = 19$  余り 4 より、 $125 \times (5 + 7 \times 19) + 76 = 17326$  です。