# 最難関問題

２つの単位分数への分解・１

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$のように分子が１の分数を単位分数といいます。$\frac{1}{6}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$のように，単位分数を２つの異なる単位分数の和に分解することを考えます。$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$と$\frac{1}{15}+\frac{1}{10}$のように順番を入れかえただけのものは同じ式とします。

（１）$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$以外の，$\frac{1}{6}$を２つの異なる単位分数の和に分解する式をすべてかきなさい。

（２）$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$という式を計算すると，$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{3}{30}+\frac{2}{30}=\frac{3+2}{30}=\frac{1}{6}$となります。よって，

$$\frac{1}{6}=\frac{3+2}{30}=\frac{3+2}{6\times(3+2)}=\frac{3}{6\times(3+2)}+\frac{2}{6\times(3+2)}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$$ です。

（１）で求めたこれ以外の$\frac{1}{6}$の分解も考えると，$\frac{□}{6\times(□+△)}+\frac{△}{6\times(□+△)}$を約分すると２つの異なる単位分数の和に分解する式になり，６×（□＋△）が２つの単位分数の分母の最小公倍数であるとき，□と△にあてはまる整数にはどのような性質がありますか。簡単に説明しなさい。

（３）$\frac{1}{2023}$を２つの異なる単位分数の和に分解する式はいくつありますか。

# 最難関問題

２つの単位分数への分解・１

（１）$\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$，$\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$，$\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$

（２）（解答例）６の約数で互いに素　（３）７個

（１）$\frac{1}{6}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$なので，大きいほうの単位分数は$\frac{1}{11}$以上$\frac{1}{7}$以下，小さいほうの単位分数は$\frac{1}{13}$以下です。

$\frac{1}{6}-\frac{1}{11}$から$\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$までを計算すると，答えが単位分数になるのは，

$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$，$\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$，$\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$，$\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42}$の４つの場合です。よって，

$\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$，$\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$，$\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$が答えとなります。

（２）まず，$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{3}{30}+\frac{2}{30}$という通分において３０は１０と１５の最小公倍数なので，右の連徐法を考えると，３と２は互いに素です。

$$\begin{array}{r|rr} 5 & 10 & 15 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

互いに素

次に，$\frac{3}{6\times(3+2)}=\frac{1}{10}$と$\frac{2}{6\times(3+2)}=\frac{1}{15}$において約分がどのように成り立っているのかを考えます。３と２は互いに素なので，$\frac{3}{3+2}$と$\frac{2}{3+2}$はこれ以上約分ができない既約分数です。よって，約分して単位分数になるのは３と２が６の約数であるためです。

６の約数は１，２，３，６で，これらのうちで互いに素である組み合わせは（２，１），（３，１），（６，１），（３，２）の４つです。これらを$\frac{\square}{6\times(\square+\triangle)}+\frac{\triangle}{6\times(\square+\triangle)}$の（△，□）にいれると，

$\frac{2}{6\times(2+1)}+\frac{1}{6\times(2+1)}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$，

$\frac{3}{6\times(3+1)}+\frac{1}{6\times(3+1)}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$，

$\frac{6}{6\times(6+1)}+\frac{1}{6\times(6+1)}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$，となって（１）で求めた式に対応します。よって，「６の約数であること」「互いに素であること」の２つを含む説明が正解です。

# 最難関問題

以上を一般的に説明すると，次のようになります。

$\frac{1}{A}=\frac{1}{B}+\frac{1}{C}$のとき，右の連除法によって求められるＢとＣの最小公倍数を

$$\begin{array}{r|ll} \square & B & C \\ \hline & c & b \end{array}$$

互いに素

Ｄとすると，$\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{b}{D}+\frac{c}{D}$なので，$\frac{b+c}{D}=\frac{1}{A}$であることから，

Ｄ＝Ａ×（ｂ＋ｃ）です。$\frac{1}{A}=\frac{b}{A\times(b+c)}+\frac{c}{A\times(b+c)}$

において，ｂとｃが互いに素であることから，ｂとｃはｂ＋ｃとも互いに素なので，$\frac{b}{b+c}$と$\frac{c}{b+c}$は既約分数です。よって，$\frac{b}{A\times(b+c)}$，$\frac{c}{A\times(b+c)}$が約分して単位分数になるのは，ｂとｃがＡの約数の場合です。こうして，$\frac{1}{A}=\frac{1}{B}+\frac{1}{C}$が成り立つときには，それに対応するＡの互いに素である約数の組が存在します。

また逆に，ｂとｃが互いに素であるＡの約数の場合，$\frac{b}{A\times(b+c)}$と$\frac{c}{A\times(b+c)}$は約分すると単位分数になり，その和は$\frac{b}{A\times(b+c)}+\frac{c}{A\times(b+c)}=\frac{b+c}{A\times(b+c)}=\frac{1}{A}$となります。

よって，分母Ａの単位分数を２個の異なる単位分数の和で表す式と，Ａの互いに素である約数の組は１対１対応をします。

（３）２０２３を素因数分解すると，７×１７×１７で，２０２３の約数は１，７，１７，７×１７＝１１９，１７×１７＝２８９，２０２３の６個です。これらのうちで互いに素である組は，（７，１），（１７，１），（１１９，１），（２８９，１），（２０２３，１），（１７，７），（２８９，７）の７組です。

よって，$\frac{1}{2023}$を２つの異なる単位分数の和に分解する式は７個あります。