

最難関問題

2つの単位分数への分解・1

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ のように分子が1の分数を単位分数といいます。 $\frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ のように、単位分数を2つの異なる単位分数の和に分解することを考えます。

$\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ と $\frac{1}{15} + \frac{1}{10}$ のように順番を入れかえただけのものは同じ式とします。

(1) $\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ 以外の、 $\frac{1}{6}$ を2つの異なる単位分数の和に分解する式をすべてかきなさい。

(2) $\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ という式を計算すると、 $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3}{30} + \frac{2}{30} = \frac{3+2}{30} = \frac{1}{6}$ となります。よって、

$$\frac{1}{6} = \frac{3+2}{30} = \frac{3+2}{6 \times (3+2)} = \frac{3}{6 \times (3+2)} + \frac{2}{6 \times (3+2)} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} \text{です。}$$

(1) で求めたこれ以外の $\frac{1}{6}$ の分解も考えると、 $\frac{\square}{6 \times (\square + \Delta)} + \frac{\Delta}{6 \times (\square + \Delta)}$ を約分すると2つの異なる単位分数の和に分解する式になり、 $6 \times (\square + \Delta)$ が2つの単位分数の分母の最小公倍数であるとき、 \square と Δ にあてはまる整数にはどのような性質がありますか。簡単に説明しなさい。

(3) $\frac{1}{2023}$ を2つの異なる単位分数の和に分解する式はいくつありますか。



最難関問題

2つの単位分数への分解・1

$$(1) \frac{1}{9} + \frac{1}{18}, \frac{1}{8} + \frac{1}{24}, \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$$

(2) (解答例) 6の約数で互いに素 (3) 7個

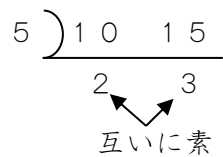
(1) $\frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$ なので、大きいほうの単位分数は $\frac{1}{11}$ 以上 $\frac{1}{7}$ 以下、小さいほうの単位分数は $\frac{1}{13}$ 以下です。

$\frac{1}{6} - \frac{1}{11}$ から $\frac{1}{6} - \frac{1}{7}$ までを計算すると、答えが単位分数になるのは、

$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$, $\frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$, $\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$, $\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$ の4つの場合です。よって、

$\frac{1}{9} + \frac{1}{18}$, $\frac{1}{8} + \frac{1}{24}$, $\frac{1}{7} + \frac{1}{42}$ が答えとなります。

(2) まず、 $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3}{30} + \frac{2}{30}$ という通分において30は10と15の



最小公倍数なので、右の連徐法を考えると、3と2は互いに素です。

次に、 $\frac{3}{6 \times (3+2)} = \frac{1}{10}$ と $\frac{2}{6 \times (3+2)} = \frac{1}{15}$ において約分が

どのように成り立っているのかを考えます。3と2は互いに素なので、 $\frac{3}{3+2}$ と $\frac{2}{3+2}$ はこれ以上約分ができない既約分数です。よって、約分して単位分数になるのは3と2が6の約数であるためです。

6の約数は1, 2, 3, 6で、これらのうちで互いに素である組み合わせは(2, 1), (3, 1),

(6, 1), (3, 2)の4つです。これらを $\frac{\square}{6 \times (\square + \Delta)} + \frac{\Delta}{6 \times (\square + \Delta)}$ の(Δ, □)にいと、

$$\frac{2}{6 \times (2+1)} + \frac{1}{6 \times (2+1)} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18},$$

$$\frac{3}{6 \times (3+1)} + \frac{1}{6 \times (3+1)} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24},$$

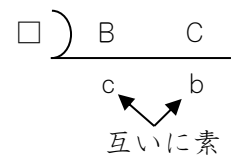
$$\frac{6}{6 \times (6+1)} + \frac{1}{6 \times (6+1)} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42},$$

となって(1)で求めた式に対応します。よって、「6の約数であること」「互いに素であること」の2つを含む説明が正解です。

最難関問題

以上を一般的に説明すると、次のようになります。

$\frac{1}{A} = \frac{1}{B} + \frac{1}{C}$ のとき、右の連徐法によって求められる B と C の最小公倍数を



D とすると、 $\frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{b}{D} + \frac{c}{D}$ なので、 $\frac{b+c}{D} = \frac{1}{A}$ であることから、

D = A × (b + c) です。 $\frac{1}{A} = \frac{b}{A \times (b+c)} + \frac{c}{A \times (b+c)}$

において、b と c が互いに素であることから、b と c は b + c とともに互いに素なので、 $\frac{b}{b+c}$ と $\frac{c}{b+c}$

は既約分数です。よって、 $\frac{b}{A \times (b+c)}$ 、 $\frac{c}{A \times (b+c)}$ が約分して単位分数になるのは、b と c

が A の約数の場合です。こうして、 $\frac{1}{A} = \frac{1}{B} + \frac{1}{C}$ が成り立つときには、それに対応する A の互いに素である約数の組が存在します。

また逆に、b と c が互いに素である A の約数の場合、 $\frac{b}{A \times (b+c)}$ と $\frac{c}{A \times (b+c)}$ は約分すると

単位分数になり、その和は $\frac{b}{A \times (b+c)} + \frac{c}{A \times (b+c)} = \frac{b+c}{A \times (b+c)} = \frac{1}{A}$ となります。

よって、分母 A の単位分数を 2 個の異なる単位分数の和で表す式と、A の互いに素である約数の組は 1 対 1 対応をします。

(3) 2023 を素因数分解すると、 $7 \times 17 \times 17$ で、2023 の約数は

1, 7, 17, $7 \times 17 = 119$, $17 \times 17 = 289$, 2023 の 6 個です。これらのうちで互いに素である組は、(7, 1), (17, 1), (119, 1), (289, 1), (2023, 1), (17, 7), (289, 7) の 7 組です。

よって、 $\frac{1}{2023}$ を 2 つの異なる単位分数の和に分解する式は 7 個あります。