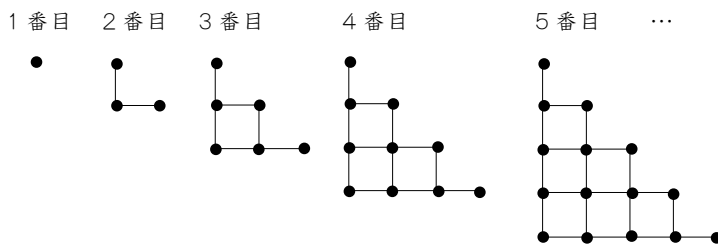




三角数を3で割る

下の図のきまりにしたがって並ぶご石の数を、三角数といいます。1番目の三角数は1，2番目の三角数は3，3番目の三角数は6，4番目の三角数は10，5番目の三角数は15，…となります。

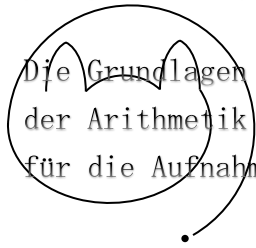


以下では，商が整数の範囲において3で割り切れる回数を考えます。3や6は1回，9は2回，27は3回割り切れます。

(1) 3で4回割り切れる最小の三角数は，何番目の三角数ですか。理由とともに答えなさい。

最小の三角数… _____ 番目

(2) 1000番目までの三角数のうち，3でちょうど4回割り切れるものは何個ありますか。



三角数を3で割る

(1) 80番目

解答例…N番目の三角数は $(1 + N) \times N \div 2$ なので、3で4回つまり81で割り切れるためには $1 + N$ か N が81で割り切れなければならないから、 $1 + N = 81$ となる80番目が最小

(2) 16個

(1) N番目の三角数は1からNまでの整数の和なので、 $(1 + N) \times N \div 2 = \frac{N \times (N + 1)}{2}$ によって求

めることができます。3で4回割り切れる整数は $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ の倍数であり、 $\frac{N \times (N + 1)}{2}$

が81の倍数であるためには $N \times (N + 1)$ が81の倍数でなければならないのですが、 N と $N + 1$ は連続する整数なので、両方が3の倍数ということはありません。よって、 N か $N + 1$ の一方が81の倍数ですから、最小となるのは $N + 1 = 81$ の場合で、このとき $N = 80$ なので、80番目です。

(2) こうして、 N か $N + 1$ が81の倍数であれば、N番目の三角数は3で4回割り切ることができます。

同様に、 N か $N + 1$ が $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$ の倍数であれば、N番目の三角数は3で5回以上割り切ることができます。よって、1000以下の範囲において、 N か $N + 1$ が81の倍数であり、

243の倍数ではない場合を考えると、 81 、 $81 \times 2 = 162$ 、 $81 \times 4 = 324$ 、

$81 \times 5 = 405$ 、 $81 \times 7 = 567$ 、 $81 \times 8 = 648$ 、 $81 \times 10 = 810$ 、 $81 \times 11 = 891$

の8つの数が条件を満たすので、 N か $N + 1$ の一方がこれらの数である場合を考えて、 $8 \times 2 = 16$ (個) です。