最難関問題

＋１×２分解

　１＝＋１×２＝１×２，３＝１×２＋１，４＝１×２×２，１０＝（１×２×２＋１）×２，
１４＝((１×２＋１）×２＋１）×２　のように，すべての整数を１，＋１，×２と（）のみからなる式で表します。式は，次のきまりにしたがいます。

〇１が連続して現れることが無いようにする。

　例えば，１＋１，（１×２＋１）＋１は，影をつけた１が連続して現れるので，きまりに反しています。

〇×２をつけ加えるときは，それまでの式を（）にいれる。ただし，かっこを省いても計算の答えが変わらないときは省く。

　例えば，１×２＋１に×２を付け加えるときは，（１×２＋１）×２となりますが，
　１×２に×２を付け加えるときは，（１×２）×２＝１×２×２なので，（）を省きます。

このような式で整数を表すことを，「＋１×２分解する」と呼ぶことにします。次の問いに答えなさい。

（１）９１を＋１×２分解しなさい。

（２）＋１×２分解したときに１と２があわせて６個現れる整数をすべて答えなさい。

（３）＋１×２分解したときに１と２があわせて１０個現れる整数は，全部で何個ありますか。

（４）＋１×２分解したときに１と２があわせて６個現れる整数の中で最大のものをＡとします。整数Ａより小さくて，＋１×２分解したときに１と２があわせて７個現れる整数は何個ありますか。

（５）＋１×２分解したときに１と２があわせて１０個現れる整数の中で最大のものをＢとします。整数Ｂより大きくて，＋１×２分解したときに１と２があわせて１１個現れる整数をすべて答えなさい。

最難関問題

＋１×２分解

（１）(((１×２×２＋１）×２＋１）×２×２＋１）×２＋１

（２）１１，１３，１４，１７，１８，２０，２４，３２　（３）５５個　（４）７個

（５）５１３，５１４，５１６，５２０，５２８，５４４，５７６，６４０，７６８，１０２４

（１）９１＝９０＋１＝４５×２＋１＝（４４＋１）×２＋１

　＝（２２×２＋１）×２＋１＝（１１×２×２＋１）×２＋１

　＝((１０＋１）×２×２＋１）×２＋１

　＝((５×２＋１）×２×２＋１）×２＋１

　＝(((４＋１）×２＋１）×２×２＋１）×２＋１

　＝(((２×２＋１）×２＋１）×２×２＋１）×２＋１

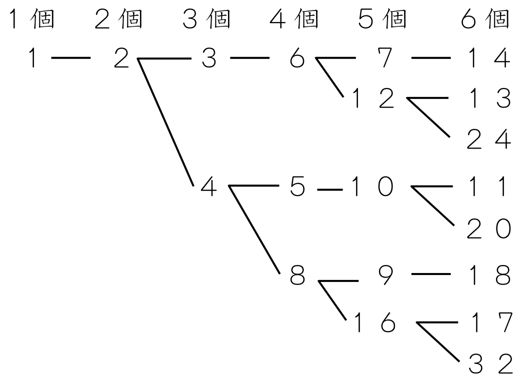
　＝(((１×２×２＋１）×２＋１）×２×２＋１）×２＋１

　となります。素因数分解と同様に一意に分解されるので，

　右のように連徐法を真似た形で分解してもよいでしょう。

＋１	９１
×２	９０
＋１	４５
×２	４４
×２	２２
＋１	１１
×２	１０
＋１	５
×２	４
×２	２
	１

（２）１から順に調べていくと，次の樹形図ができます。



　よって，１１，１３，１４，１７，１８，２０，２４，３２です。

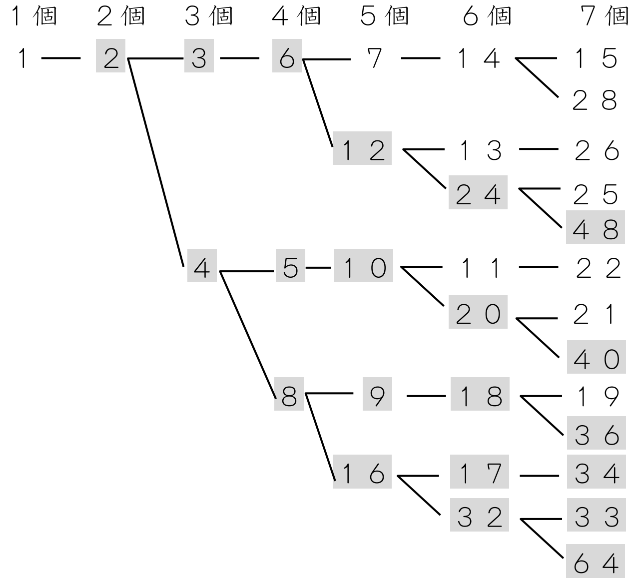
最難関問題

（３）（２）のように整数１から順に進んでいくと，奇数の場合は×２，偶数の場合は＋１と×２に分岐していきます。

１と２の個数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	１０	１１	…
整数（個）	1	1	2	3	5	8	１３	２１	３４	５５	８９	…
偶数（個）	0	1	1	2	3	5	8	１３	２１	３４	５５	…
奇数（個）	1	0	1	1	2	3	5	8	１３	２１	３４	…

表のようにフィボナッチ数列になるので，５５個です。

（４）（２）に引き続いて樹形図をかいていきます。



最大の整数は，＋１×２，４，８，１６，３２，６４，…と，最初の１に×２を繰り返し適用した数になっています。樹形図において影をつけた整数は，１つ前の最大の整数より大きい数です。＋１×２分解したときに1と2があわせて７個現れる整数のうちで３２より大きいのは３３,３４,３６,４０,４８，６４の６個で，残りの１３－６＝７（個）が３２より小さい整数です。

最難関問題

（５）（４）の樹形図において影をつけた部分がどのような仕組みになっているのかを考えます。１と２があわせて５個現れる最大の整数は１６，１と２があわせて６個現れる整数のうちで１６より大きいのは１７，１８，２０，２４，３２です。これらは次の２つの特徴を持っています。

５個　　６個　　　　　　　７個
１６
　１７（１６＋１）— ３４（３２＋２）
　１８（１６＋２）— ３６（３２＋４）
　２０（１６＋４）— ４０（３２＋８）
　２４（１６＋８）— ４８（３２＋１６）
　３２（１６×２）— ３３（３２＋１）
　　　　　　　　　— ６４（３２×２）

○１６に＋１，＋２，＋４，＋８，×２をしてできています。また，１６×２＝１６＋１６なので，１６に，２をいくつかかけ合わせてできる整数を加えた数になっています。
○１７，１８，２０，２４，３２はいずれも３２の半分（つまり１６）より大きい整数です。これらに×２してできる整数である，３４，３６，４０，４８，６４と，３２に＋１してできる整数である３３のみが，３２より大きい整数になります。

このようにして，１と２があわせて７個現れる整数のうちで３２より大きいのは，
　１６×２＋１＝３２＋１，
　（１６＋１）×２＝３２＋２，
　（１６＋２）×２＝３２＋４，
　（１６＋４）×２＝３２＋８，
　（１６＋８）×２＝３２＋１６，
　（１６＋１６）×２＝３２＋３２，
となります。

　１と２があわせて１０個現れる最大の整数Ｂ＝１×２×２×２×２×２×２×２×２×２＝５１２なので，１と２があわせて１１個現れる５１２より大きい整数は，
５１２＋１＝５１３，５１２＋２＝５１４，５１２＋４＝５１６，５１２＋８＝５２０，
５１２＋１６＝５２８，５１２＋３２＝５４４，５１２＋６４＝５７６，５１２＋１２８＝６４０，
５１２＋２５６＝７６８，５１２＋５１２＝１０２４です。