最難関問題

単位分数の通分

$\frac{1}{○}$，$\frac{1}{△}$，$\frac{1}{□}$，…といくつかの異なる分数があり，分子はすべて１です（分子が１の分数を単位分数といいます）。これらを分母の最小公倍数Ｌで通分したところ，$\frac{A}{L}$，$\frac{B}{L}$，$\frac{C}{L}$，…となり，分子のＡ，Ｂ，Ｃ，…の最小公倍数がＬになりました。このとき，$\frac{1}{○}$，$\frac{1}{△}$，$\frac{1}{□}$，…という単位分数にはどのような関係が成り立っていますか。簡単に説明しなさい。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

単位分数の通分

「○，△，□，…の最大公約数が１となっている」「単位分数の分母が互いに素」など

　例としてＬ＝３６の場合を考えてみます。

$$\frac{1}{36},\ \frac{1}{18},\ \frac{1}{4}\ \rightarrow\ \frac{1}{36},\ \frac{2}{36},\ \frac{9}{36}$$

この場合，１，２，９の最小公倍数は１８なので，条件を満たしません。条件を満たすのは，

$$\frac{4}{36},\ \frac{6}{36},\ \frac{18}{36}\ \leftarrow\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{2}$$

のような場合です。３６を素因数分解すると２×２×３×３となることから，$\frac{A}{36}$，$\frac{B}{36}$，$\frac{C}{36}$，…の分子Ａ，Ｂ，Ｃ，…の最小公倍数が３６となるためには，Ａ，Ｂ，Ｃ，…の中に，素因数分解をしたときに２が２個現れる数と３が２個現れる数が含まれる必要があります。例えばＡが２を２個，Ｂが３を２個素因数として持つ数であるとすると，$\frac{A}{36}=\frac{1}{○}$において$○=\frac{36}{A}$ですから，○は素因数分解をしたときに２が現れません。同様に，$\frac{B}{36}=\frac{1}{△}$において$△=\frac{36}{B}$ですから，△は素因数分解をしたときに３が現れません。○も△も３６の約数ですから，素因数分解をしたときに現れる素数は２か３なので，こうして○と△は互いに素となります。よって，○，△，□，…という分母の最大公約数は１です。

　逆も成り立つことを確認しておきます。○，△，□，…という分母の最大公約数が１で最小公倍数が３６のとき，○，△，□，…のなかには素因数分解をしたときに２が現れない数や３が現れない数が含まれています。２が現れない数を○，３が現れない数を△とすると，$\frac{A}{36}$，$\frac{B}{36}$，$\frac{C}{36}$，…の分子$A=\frac{36}{○}$，$B=\frac{36}{△}$ですから，Ａは素因数分解をしたときに２が２個現れ，Ｂは素因数分解をしたときに３が２個現れます。よって，Ａ，Ｂ，Ｃ，…の最小公倍数は３６となります。