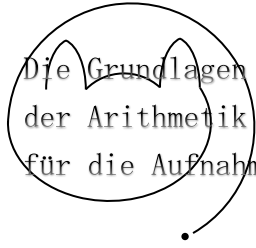


最難関問題

単位分数の通分

$\frac{1}{\bigcirc}, \frac{1}{\triangle}, \frac{1}{\square}, \dots$ といくつかの異なる分数があり、分子はすべて1です（分子が1の分数を単位分数といいます）。これらを分母の最小公倍数Lで通分したところ、 $\frac{A}{L}, \frac{B}{L}, \frac{C}{L}, \dots$ となり、分子のA, B, C, ...の最小公倍数がLになりました。このとき、 $\frac{1}{\bigcirc}, \frac{1}{\triangle}, \frac{1}{\square}, \dots$ という単位分数にはどのような関係が成り立っていますか。簡単に説明しなさい。



最難関問題

単位分数の通分

「○, △, □, …の最大公約数が1となっている」「単位分数の分母が互いに素」など

例として $L = 36$ の場合を考えてみます。

$$\frac{1}{36}, \frac{1}{18}, \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{9}{36}$$

この場合, 1, 2, 9の最小公倍数は18なので, 条件を満たしません。条件を満たすのは,

$$\frac{4}{36}, \frac{6}{36}, \frac{18}{36} \leftarrow \frac{1}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$$

のような場合です。36を素因数分解すると $2 \times 2 \times 3 \times 3$ となることから, $\frac{A}{36}, \frac{B}{36}, \frac{C}{36}, \dots$ の分

子 A, B, C, \dots の最小公倍数が36となるためには, A, B, C, \dots の中に, 素因数分解をしたときに2が2個現れる数と3が2個現れる数が含まれる必要があります。例えばAが2を2個, Bが3を2個素因数

として持つ数であるとする, $\frac{A}{36} = \frac{1}{\bigcirc}$ において $\bigcirc = \frac{36}{A}$ ですから, \bigcirc は素因数分解をしたときに2が現

れません。同様に, $\frac{B}{36} = \frac{1}{\triangle}$ において $\triangle = \frac{36}{B}$ ですから, \triangle は素因数分解をしたときに3が現れません。

\bigcirc も \triangle も36の約数ですから, 素因数分解をしたときに現れる素数は2か3なので, こうして \bigcirc と \triangle は互いに素となります。よって, $\bigcirc, \triangle, \square, \dots$ という分母の最大公約数は1です。

逆も成り立つことを確認しておきます。 $\bigcirc, \triangle, \square, \dots$ という分母の最大公約数が1で最小公倍数が36のとき, $\bigcirc, \triangle, \square, \dots$ のなかには素因数分解をしたときに2が現れない数や3が現れない数が含まれてい

ます。2が現れない数を \bigcirc , 3が現れない数を \triangle とすると, $\frac{A}{36}, \frac{B}{36}, \frac{C}{36}, \dots$ の分子 $A = \frac{36}{\bigcirc}, B = \frac{36}{\triangle}$

ですから, Aは素因数分解をしたときに2が2個現れ, Bは素因数分解をしたときに3が2個現れます。よって, A, B, C, \dots の最小公倍数は36となります。