受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

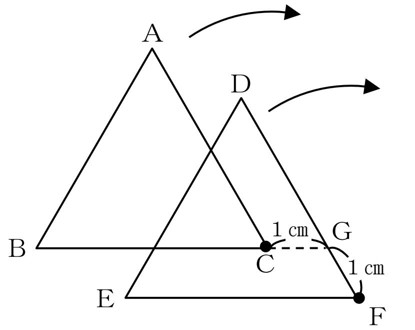
最難関問題

正三角形の回転と重なり

１辺が４㎝の正三角形ＡＢＣとＤＥＦが，以下のように並んでいます。

○ 辺ＡＢと辺ＤＥは平行

○ 辺ＢＣをのばした線と辺ＤＦの交点をＧとすると，
ＣＧ＝ＧＦ＝１㎝



この状態から，２つの三角形はそれぞれ頂点Ｃ，Ｆを中心として時計回りに同時に回転し始めます。三角形ＡＢＣの回転する速さは毎秒１０度，三角形ＤＥＦの回転する速さは毎秒５度です。

（１）２つの三角形の重なり合う部分が，１回目に全ての内角の大きさが１２０度の六角形になるのは，回転し始めてから何秒後ですか。

（２）回転し始めてから４分以内に，２つの三角形の重なり合う部分は全ての内角の大きさが１２０度の六角形に何回なりますか。

最難関問題

正三角形の回転と重なり　（１）１２秒後　（２）７回

（１）図１のように，全ての内角の大きさが１２０度の六角形は，向かいあう辺が平行になります。２つの三角形が重なりあってそのような六角形ができるということは，１つの三角形の辺が平行になることはあり得ないので，図２のように六角形の辺が１本おきに同じ三角形の辺になっているということです。図３のようにとなりあう３本の辺が同じ三角形の辺になることは，内角の和が１２０＋１２０＝２４０（度）より１８０度を超えてしまうので，あり得ません。

図１

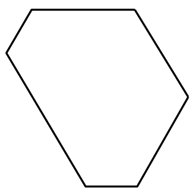


図２

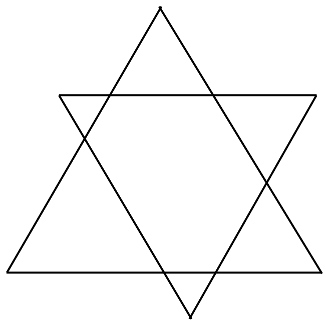
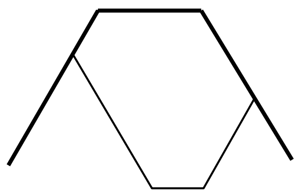
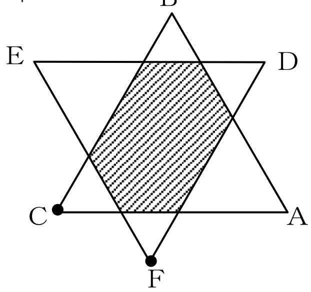


図３



よって，三角形ＡＢＣとＤＥＦが図２のように重なりあう場合を考えます。このとき，２つの三角形の辺は回転し始める状態のように，互いに平行になっています。回転し始めた後で最初にそのようになるのは，２つの三角形の回転した角度の差が６０度になるときですから，６０÷（１０－５）＝１２（秒後）です。１２秒後の図をかくと，２つの三角形は図４のようになって重なり合う部分が全ての内角の大きさが１２０度の六角形になります。よって，１２秒後です。

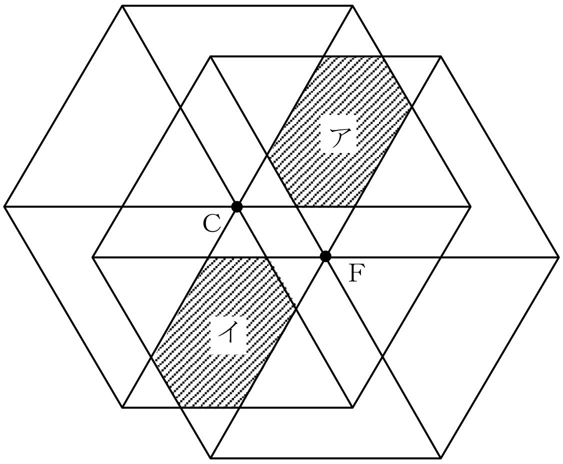
図４



最難関問題

（２）３６０÷１０＝３６，３６０÷５＝７２であることから，最小公倍数より７２秒の周期になるのは明らかなので，１２秒ごとの図をかいて考えることも可能ですが，もう少し工夫をすると図５のようになります。２つの三角形の１２秒ごとの位置を重ねると正六角形になるので，最初に頂点ＣおよびＦを中心とする正六角形をかいてしまい，重なり合う部分が条件を満たす場合を探します。

図５



すると，斜線で示したア，イの六角形が見つかります。アは（１）で求めた１２秒後にできる六角形です。イは１２×５＝６０（秒後）ですから，７２秒の周期において１２秒後と６０秒後に２つの三角形の重なり合う部分は全ての内角の大きさが１２０度の六角形になります。

４分＝２４０秒ですから，２４０秒÷７２秒＝３回余り２４秒より，周期の３回の繰り返しにおいて２×３＝６（回），最後の２４秒間で１回，重なり合う部分が全ての内角の大きさが１２０度の六角形になります。よって，６＋１＝７（回）です。