受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

１１の倍数と２０２７

１１の倍数は,＜奇数番目の位の数の和＞と＜偶数番目の位の数の和＞の差が０か１１の倍数になります。たとえば９１８０７１は,９＋８＋７＝２４,１＋０＋１＝２で,２４－２＝２２なので,１１の倍数です。

ここで,２０２７,７２００２０のように,２が２つ,７が１つ,０がいくつか並(なら)ぶ整数を考えます。これらの整数のうちで１１の倍数である整数について,以下の問いに答えなさい。

（１）小さいほうから１番目,５番目,１０番目の数をそれぞれ答えなさい。

（２）９７５個の整数があるのは,何桁のときですか。また,９７５個の整数のうちでちょうど真ん中の大きさの整数を答えなさい。答えるときは,連続する０については以下のように略してかまいません。

$$7\underbrace{0\cdots0}_{10\text{個}}2\underbrace{0\cdots0}_{3\text{個}}2\underbrace{0\cdots0}_{7\text{個}}$$

最難関問題

１１の倍数と２０２７

（１）１番目…２０２０７，５番目…２０７０２０，１０番目…２０２０７００

（２）５３桁で２$\underbrace{0\cdots0}_{7個}７\underbrace{0\cdots0}_{37個}２\underbrace{0\cdots0}_{6個}$，５４桁で２$\underbrace{0\cdots0}_{7個}７\underbrace{0\cdots0}_{37個}２\underbrace{0\cdots0}_{7個}$

（１）２＋２＋７＝１１より，２，２，７が全て奇数桁か偶数桁の一方に並ぶ整数が条件を満たします。小さい順に以下のようになります。

○５桁…２０２０７，２０７０２，７０２０２

○６桁…２０２０７０，２０７０２０，７０２０２０

○７桁…２０００２０７，２０００７０２，２０２０００７，２０２０７００，…

よって，１番目…２０２０７，５番目…２０７０２０，１０番目…２０２０７００となります。

（２）奇数桁の整数の場合，奇数桁目に２，２，７と０が並び，偶数桁には０のみが並びます。よって，例えば９けたの整数であれば，５か所ある奇数桁のうち一番大きい９桁目に２か７が並び，４か所に２，２，７の残りと０が並びます。

９桁目が２の場合は残りの４か所のうち２か所に２と７が並ぶので，４×３＝１２（通り），

９桁目が７の場合は残りの４か所のうち２か所に２が並ぶので，４×３÷（２×１）＝６（通り）で，あわせて１２＋６＝１８（通り）です。

よって，９７５÷３×２＝６５０＝２６×２５より，奇数桁は２６＋１＝２７（桁）あるので，２７×２－１＝５３（桁）が答えとなります。このときの，（９７５＋１）÷２＝４８８（番目）の整数は，一番上の位の数が２の整数が６５０個あるのでそのうちのひとつです。一番上の位を除いた２６桁のうちで，２か７が上から数えて最初に現れるのがどこかに注目して場合分けすると，次のようになります。

最初に現れるのが下から２番目

２７，７２の２個です。

最初に現れるのが下から３番目

２０７，２７０，７０２，７２０の４個です。

最初に現れるのが下から４番目

２□□□が３個，７□□□も３個で，あわせて６個です。

最難関問題

以降も同様にして８個，１０個，１２個，…となるので，２＋４＋６＋８＋…が４８８くらいになる場合を求めると，２＋４＋６＋８＋…＋４２＝４６２，４８８－４６２＝２６なので，２か７が最初に現れるのが下から（４２＋２）÷２＋１＝２３（番目）の整数の小さいほうから２６番目を考えます。下から２３番目に現れるのが２の場合が２２個あって，２６－２２＝４より，下から２３番目に現れるのが７の整数の小さいほうから４番目なので，

$2\underbrace{0\cdots0}_{3\text{個}}7\underbrace{0\cdots0}_{18\text{個}}2\underbrace{0\cdots0}_{3\text{個}}$ です。ここに，２６桁ある偶数桁が入るので，

$2\underbrace{0\cdots0}_{7\text{個}}7\underbrace{0\cdots0}_{37\text{個}}2\underbrace{0\cdots0}_{6\text{個}}$ が答えになります。

さらに,以上の５３桁の整数の末尾に０をつけると５４桁の整数になって全く同じことが成り立つので，５４桁の場合の

$2\underbrace{0\cdots0}_{7\text{個}}7\underbrace{0\cdots0}_{37\text{個}}2\underbrace{0\cdots0}_{7\text{個}}$ も答えになります。