受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

円の移動と加速膨張

一直線上の２点Ｏ，Ｐは同じ地点から，反対側に同時に動き出します。点Ｐは一定の速さで進みますが，点Ｏの進む速さは，０.５秒後には秒速０.５㎝，１秒後には秒速１㎝というように一定の割合で加速します。点Ｏの速さは図１のグラフで表すことができます。

また，図２のように点Ｏを中心とする円は，半径が最初０㎝で，点Ｏが動き始めるとともに毎秒６㎝の割合で長くなります。点Ｐを中心とする円も半径は最初０㎝で点Ｐが動き始めるとともに長くなっていきますが，半径が長くなる割合は，点Ｏの速さのように，一定の割合で増えていきます。

図１

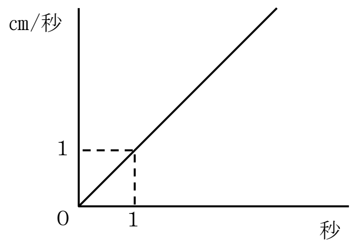
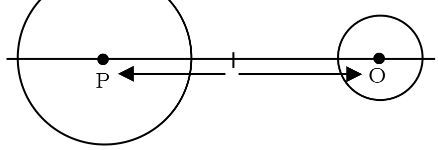


図２



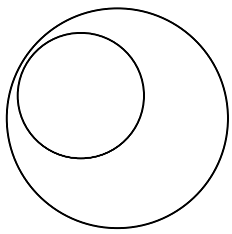
２点が動き始めてから２秒後に，２つの円ははじめて接します。また，２点が動き始めてから２８秒後に点Ｏを中心とする円の円周と点Ｐが重なります。

（１）点Ｐの速さは毎秒何㎝ですか。

（２）点Ｐを中心とする円の半径が長くなる割合は，１秒間で毎秒何㎝増えますか。

（３）図３のように，一方の円が他方の円の内側に完全に入るのは，２点が動き始めてから何秒後を過ぎたときですか。

図３



受験算数の基礎

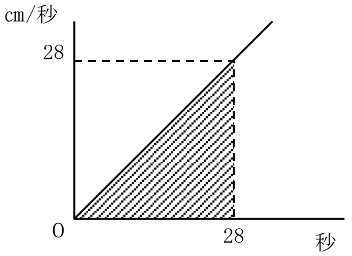
Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

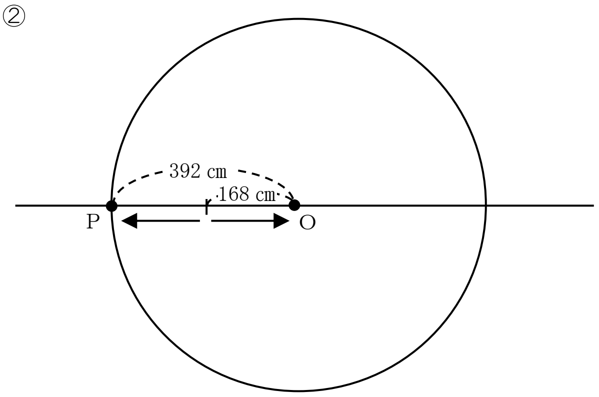
円の移動と加速膨張　（１）毎秒８㎝　（２）毎秒３㎝　（３）１４秒後

（１）２点が動き始めてから２８秒後に点Ｏを中心とする円の円周と点Ｐが重なることに注目します。点Ｏの速さは２８秒後には毎秒２８㎝なので，２８秒間の平均の速さは２８÷２＝１４より毎秒１４㎝です。よって，点Ｏが進んだ距離は１４×２８＝３９２（㎝）です。こうして，点Ｏの進んだ距離は，図①の斜線部分の面積である，２８×２８÷２＝３９２と等しい値になります。また，２８秒間で円Ｏの半径は，６×２８＝１６８（㎝）になります。よって，２８秒後の点Ｏ，Ｐ，点Ｏを中心とする円の関係は，図②のようになります。

図①



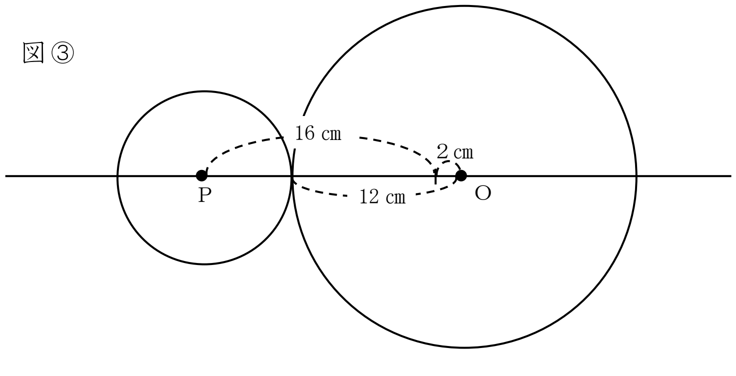
図②



点Ｐは２８秒間で３９２－１６８＝２２４（㎝）進むので，点Ｐの速さは，２２４÷２８＝８より，毎秒８㎝です。

（２）２点が動き始めてから２秒後に２つの円がはじめて接することに注目します。２秒間で点Ｏは２×２÷２＝２（㎝）進み，点Ｐは８×２＝１６（㎝）進みます。また，点Ｏを中心とする円の半径は６×２＝１２（㎝）なので，２秒後の点と円の関係は，図③のようになります。

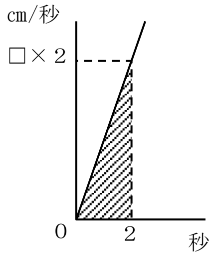
図③



最難関問題

点Ｐを中心とする円の半径は１６＋２－１２＝６（㎝）なので，点Ｐを中心とする円の半径が長くなる割合が１秒間で毎秒□㎝増えるとすると，２秒後には半径が毎秒（□×２）㎝増えるので，図④の斜線部分の面積を求めて，２×（□×２）÷２＝６より，□＝３です。

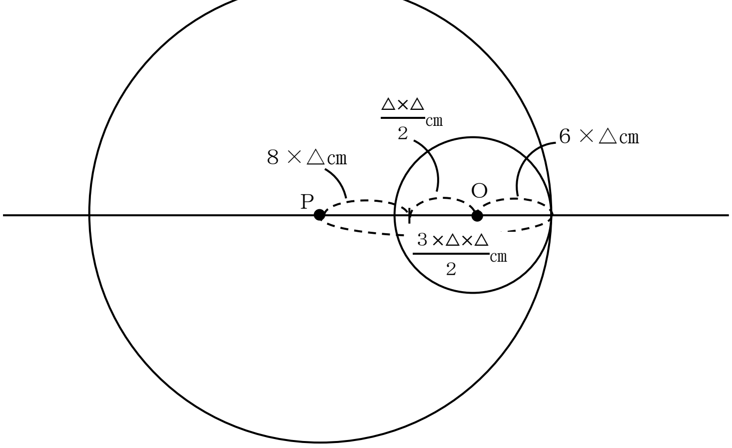
図④



（３）点Ｐを中心とする円は，２秒後には（２）のように点Ｏを中心とする円より小さいのですが，その後半径が「加速度的に」長くなっていくので，まずは点Ｐを中心とする円の内側に点Ｏを中心とする円が入る場合を考えます。

△秒間に，点Ｏの進む距離は△×△÷２＝$\frac{△×△}{2}$（㎝），点Ｐの進む距離は（８×△）㎝，点Ｏを中心とする円の半径は（６×△）㎝，点Ｐを中心とする円の半径は△×（３×△）÷２＝$\frac{3×△×△}{2}$（㎝）です。図⑤のように，８×△＋$\frac{△×△}{2}$＋６×△＝$\frac{3×△×△}{2}$が成り立つときに点Ｐを中心とする円の内側に点Ｏを中心とする円が入り始めるので，８×△＋６×△＝$\frac{3×△×△}{2}-\frac{△×△}{2}$，１４×△＝△×△，１４＝△となって，１４秒後です。

図⑤



点Ｏを中心とする円の内側に点Ｐを中心とする円が入る場合は，$\frac{3×△×△}{2}$＋８×△＋$\frac{△×△}{2}$＝６×△となるので，８×△が６×△より大きいことから，明らかに条件を満たしません。