受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

最も遠い点への最短距離・正四面体

（１）図１の直角三角形を４個組み合わせて，図２の正方形ＡＢＣＤを作りました。

図１

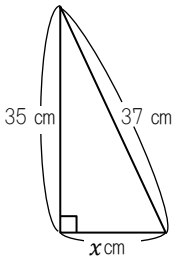


図２

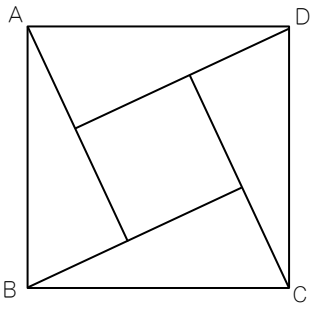
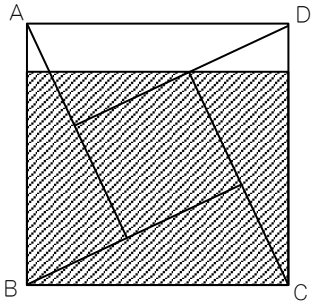


図３



（ア）図３の斜線部分の長方形の面積を求めなさい。

（イ）図１のxにあてはまる数を求めなさい。

最難関問題

（２）すべての面が正三角形の三角すいを，正四面体といいます。４つの面が高さ１２cmの正三角形でできている図４の正四面体ＡＢＣＤにおいて，正四面体の表面にある点Ｐから，正四面体の表面をたどって他の面にある点に最短距離で移動します。このとき，最短距離が最も長くなる点Ｑの位置を考えます。

（ア）正四面体ＡＢＣＤの１辺の長さを□cmとします。□×□の値を求めなさい。

（イ）点Ｐが頂点Ａの位置にあるとき，点Ｑの位置を図５にならって解答らんにかきなさい。また，点ＰとＱの最短距離を求めなさい。

図４

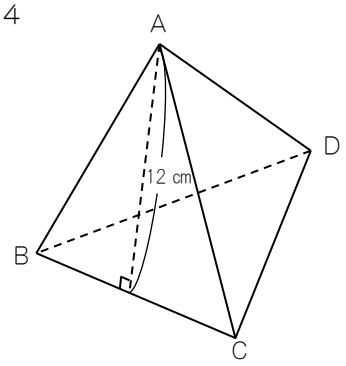
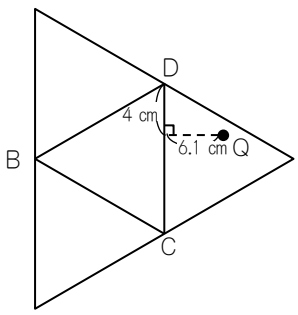
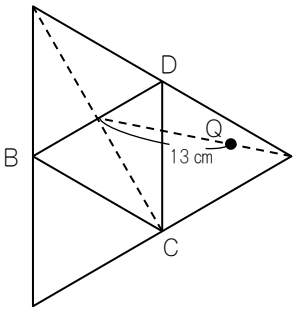
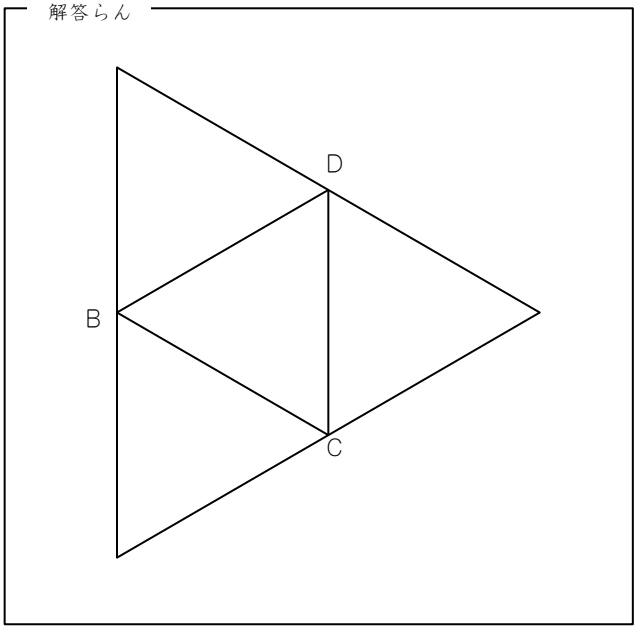


図５





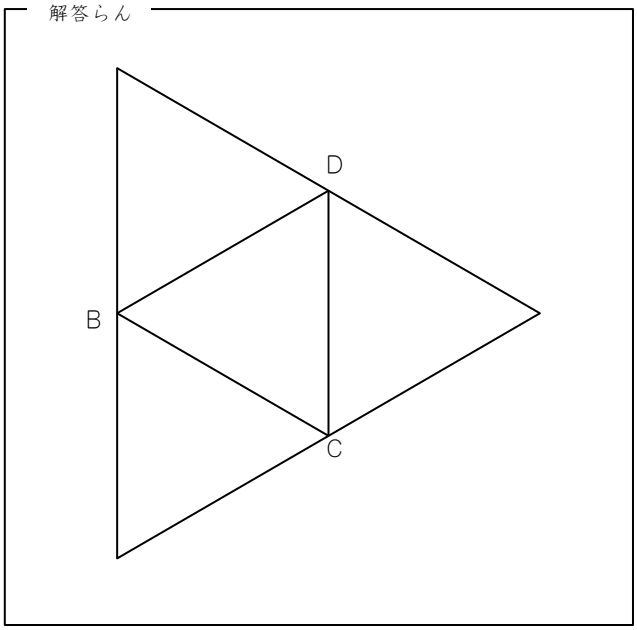
解答らん



最難関問題

（ウ）点Ｐが辺ＡＢ上にあって，ＡＰ：ＰＢ＝３：５のとき，点Ｑの位置を図５にならって解答らんにかきなさい。また，点ＰとＱの最短距離を求めなさい。

解答らん



最難関問題

最も遠い点への最短距離・正四面体

（１）（ア）１２２５㎠　（イ）x＝１２

（２）（ア）１９２　（イ）１６㎝，図は解説参照　（ウ）１４㎝，図は解説参照

（１）この問題は過去作の「ピタゴラスの定理の証明法」と同内容です。

（ア）図①のように点Ｅ～Ｊをきめると，長方形ＢＣＦＥの面積は，

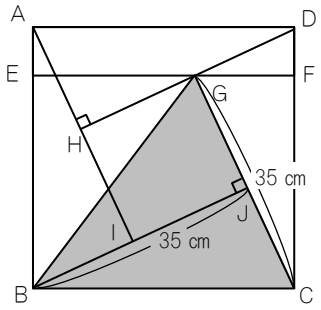
$35\times35\times\frac{1}{2}\times2=1225$（㎠）です。

（イ）長方形ＡＥＦＤの面積は，３７×３７－３５×３５＝１４４（㎠）です。図②のように

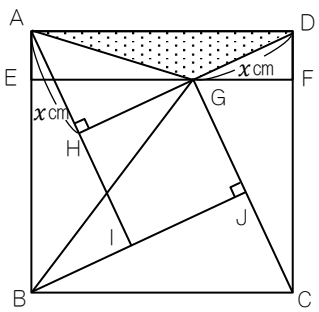
長方形ＡＥＦＤの面積は，$x\times x\times\frac{1}{2}\times2=x\times x=144$となるので，$x$＝１２です。

こうして，図③のように直角三角形において，直角をはさむ２辺の長さをそれぞれ自分とかけあわせた平方数の和は，のこる１辺を自分とかけあわせた平方数に等しくなります（ピタゴラスの定理）。

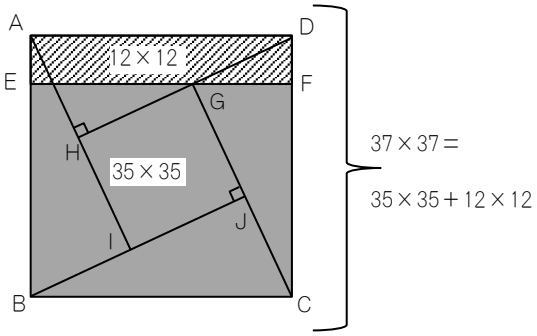
図①



図②



図③



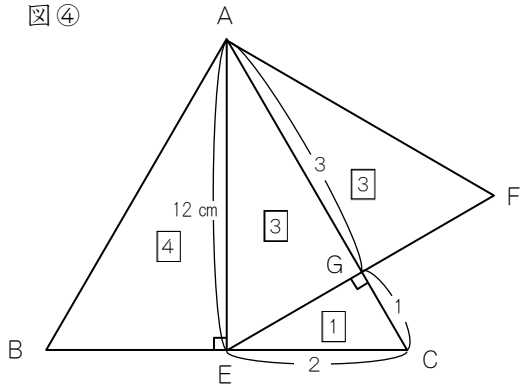
最難関問題

（２）

（ア）図④のように，正四面体の面ＡＢＣと，１辺１２㎝の正三角形を重ねます。ＣＧ：ＣＥ＝ＣＥ：ＣＡ＝１：２より，ＡＧ：ＧＣ：ＣＥ＝３：１：２です。よって，図の面積比が成り立ち，三角形ＡＥＦと三角形ＡＢＣの面積の比は，$\boxed{6}:\boxed{8}=3:4$です。３：４＝（ＡＥ×ＡＥ）:（ＡＢ×ＡＢ）なので，

ＡＢ×ＡＢ＝１２×１２×$\frac{4}{3}$＝１９２です。

図④

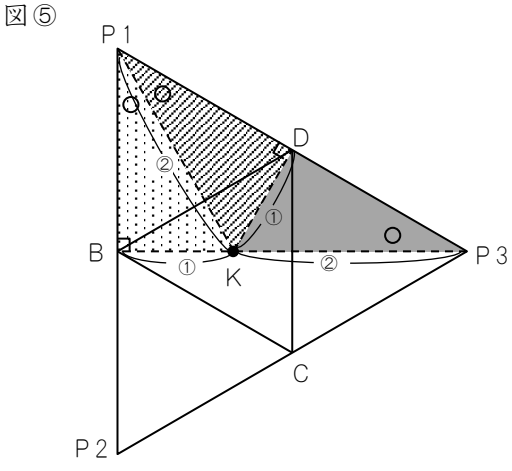


（イ）正四面体ＡＢＣＤの展開図をかくと，図⑤のように点Ｐは３つの点Ｐ１～Ｐ３に分かれます。

Ｐ１とＰ２から等距離にある点は，線Ｐ１Ｐ２の垂直二等分線にあたる線ＢＰ３上にあります。線ＢＰ３上で，Ｐ１，Ｐ２，Ｐ３から等距離にある点をＫとすると，図⑤の色をつけた３つの三角形は内角の大きさが９０度・６０度・３０度の三角定規型の合同な直角三角形になるので，

③＝１２＋１２＝２４（㎝），①＝２４×$\frac{1}{3}$＝８（㎝），Ｐ１Ｋ＝②＝８×２＝１６（㎝）です。

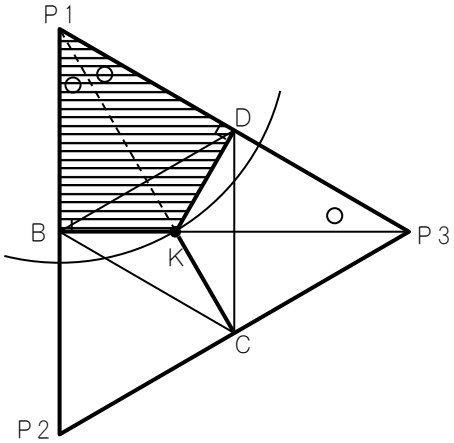
図⑤



最難関問題

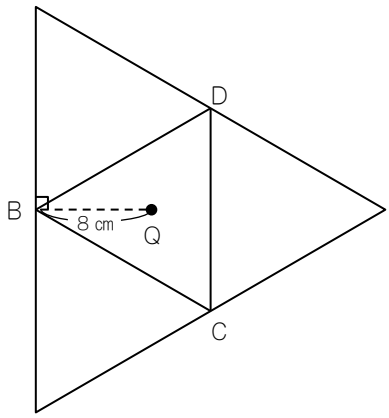
次に，点Ｋによって，展開図を３つの四角形Ｐ１ＢＫＤ，Ｐ２ＣＫＢ，Ｐ３ＤＫＣに分けて，点Ｑが点Ｋではなくて，いずれかの四角形の内部にある可能性を考えます。四角形Ｐ１ＢＫＤの内部に点Ｑがある場合を図⑥において考えると，四角形Ｐ１ＢＫＤはＰ１Ｋを半径とする円において，頂点Ｋは円周上にあり，残りの部分は円の内部に入るので，点Ｑが点Ｋを除く四角形Ｐ１ＢＫＤの内部に存在することはありません。残りの場合も同様なので，点Ｑと点Ｋは重なります。

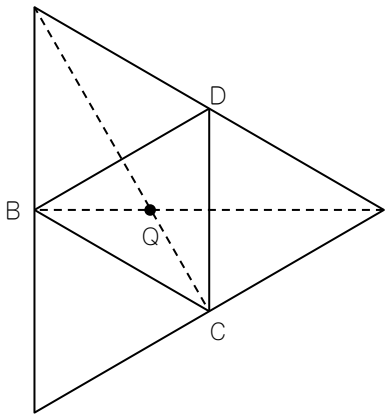
図⑥



よって，下の図が解答例になります。点Ｑの位置が＜解答例＞と同じであれば正解で，最短距離は１６㎝です。

＜解答例＞





最難関問題

（ウ）正四面体ＡＢＣＤを一部の面を重複させて展開した図⑦をかくと，点Ｐは４つの点Ｐ１～Ｐ４，頂点ＡはＡ１～Ａ３，頂点ＢはＢ１～Ｂ３に分かれます。点Ｐ１～Ｐ４から等距離にある点Ｋは線Ｂ１Ａ３上にあります。Ｂ１Ｋ＝$x$cmとすると，cmの単位において，

Ｐ１Ｂ１×Ｐ１Ｂ１＝１９２×$\frac{5}{8}$×$\frac{5}{8}$＝７５なので，

Ｂ１Ｋ×Ｂ１Ｋ＋Ｐ１Ｂ１×Ｐ１Ｂ１＝x×x＋７５，

Ｐ３Ａ３×Ｐ３Ａ３＝１９２×$\frac{3}{8}$×$\frac{3}{8}$＝２７なので，

Ａ３Ｋ×Ａ３Ｋ＋Ｐ３Ａ３×Ｐ３Ａ３＝（２４－x）×（２４－x）＋２７，

x×x＋７５＝（２４－x）×（２４－x）＋２７，

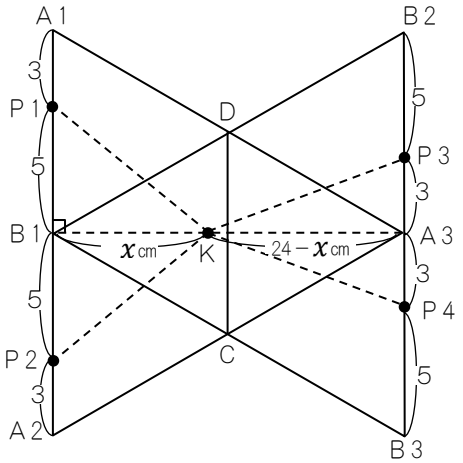
x×x＋７５＝５７６－４８×x＋x×x＋２７，

４８×x＝５２８，x＝１１となります。

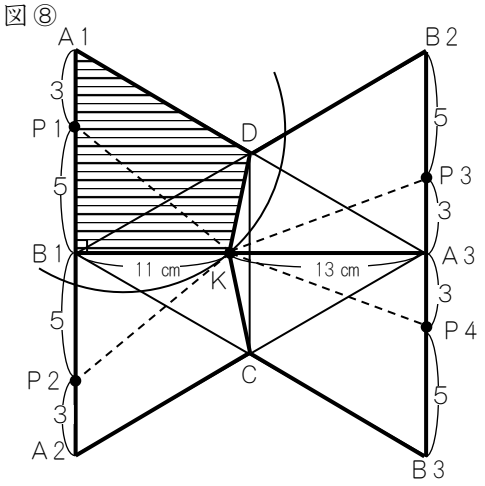
このとき，Ｐ１Ｋ×Ｐ１Ｋ＝Ｂ１Ｋ×Ｂ１Ｋ＋Ｐ１Ｂ１×Ｐ１Ｂ１＝１２１＋７５＝１９６となるので，Ｐ１Ｋ＝１４です。

点Ｋによって，図⑦を太線で囲んだ４つの四角形に分けると，点Ｑが点Ｋではなくて，いずれかの四角形の内部にある場合，例えば四角形Ａ１Ｂ１ＫＤの内部に点Ｑがあるときは，Ｐ１Ｋを半径とする円において，頂点Ｋは円周上にあり，残りの部分は円の内部に入るので，点Ｑが点Ｋを除く四角形Ａ１Ｂ１ＫＤの内部に存在することはありません。残りの場合も同様なので，点Ｑと点Ｋは重なります。

図⑦



図⑧



最難関問題

よって，下の図が解答例になります。点Ｑの位置が＜解答例＞と同じであれば正解で，最短距離は１４㎝です。

＜解答例＞

