受験算数の基礎

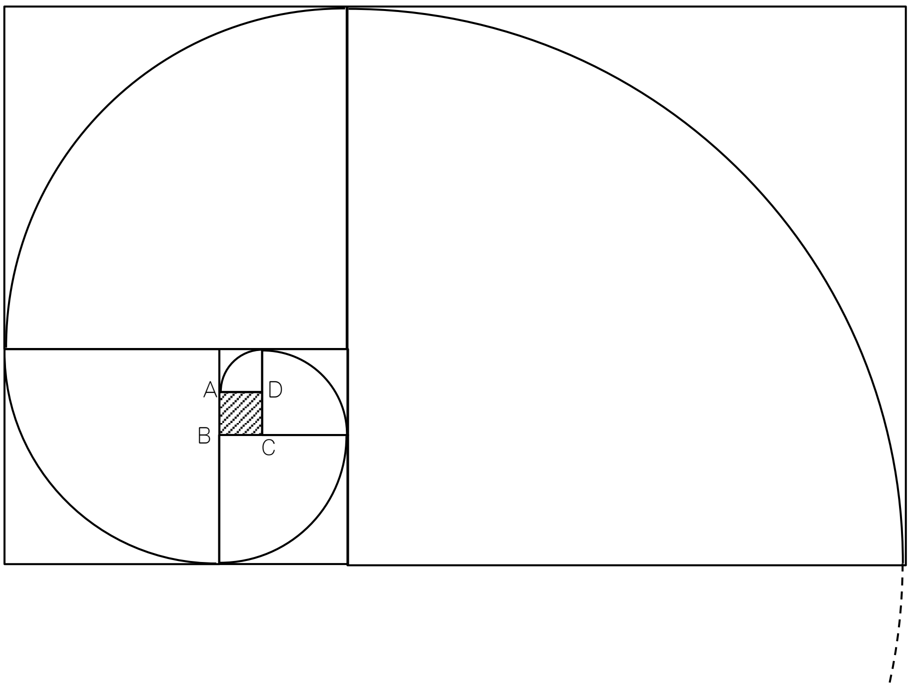
Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

フィボナッチ螺旋と点移動・１

下のように，１辺１㎝の正方形ＡＢＣＤの周りに正方形と中心角９０度のおうぎ形を並べていくことでできる，おうぎ形の弧が螺旋（ぐるぐるした渦の形）を描くような図形があります。

点Ｐは毎秒１.５７㎝の速さで，点Ａから出発してこの螺旋の上を進んでいきます。円周率は３.１４とします。



（１）１９秒後に３つの点Ａ，Ｃ，Ｐを結んでできる三角形ＡＣＰの面積を求めなさい。

（２）６３４秒後に点Ｐが通過しているおうぎ形の弧の中心をＱとします。３つの点Ａ，Ｃ，Ｑを結んでできる三角形ＡＣＱの面積を求めなさい。

（３）３つの点Ａ，Ｃ，Ｐを結んでできる三角形ＡＣＰの面積が，３回目に（２）の三角形ＡＣＱの面積と等しくなるのは，点Ｐが出発してから何秒後ですか。

受験算数の基礎

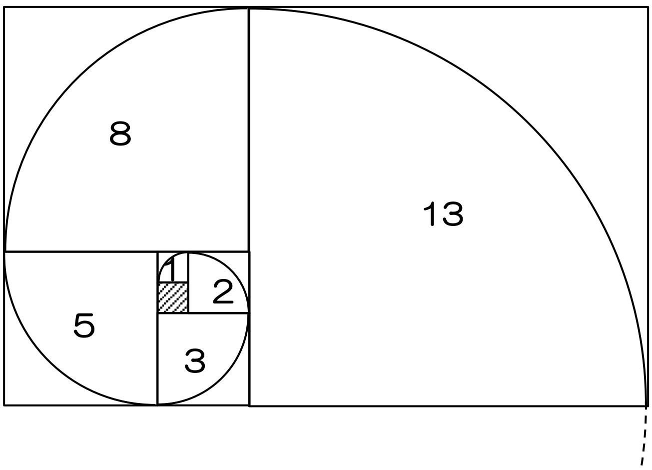
Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

フィボナッチ螺旋と点移動・１　（１）６㎝^{2}　（２）８４.５㎝^{2}　（３）７９６.５秒後

（１）正方形の１辺とおうぎ形の半径の長さは，図①のようになります。また，半径１㎝のおうぎ形に注目をすると，弧の長さは１×２×３.１４×$\frac{1}{4}$＝１.５７（㎝）なので，点Ｐが通過するのにかかる時間は，１.５７÷１.５７＝１（秒）です。よって，図①の数字は，点Ｐが通過する時間（秒）と一致します。

図①



続きを考えると，表①のようなフィボナッチ数列になります。

表①

番目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
秒・㎝	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

１９＝１＋２＋３＋５＋８より，出発してから１９秒後の三角形ＡＣＰは図②のようになります。

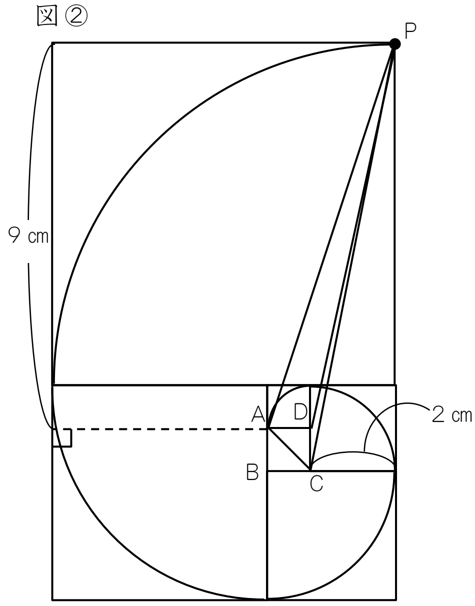
三角形ＡＣＤの面積は１×１×$\frac{1}{2}$＝０.５（㎝^{2}），

三角形ＡＤＰの面積は１×９×$\frac{1}{2}$＝４.５（㎝^{2}），

三角形ＣＤＰの面積は１×２×$\frac{1}{2}$＝１（㎝^{2}），

となるので，０.５＋４.５＋１＝６（㎝^{2}）です。

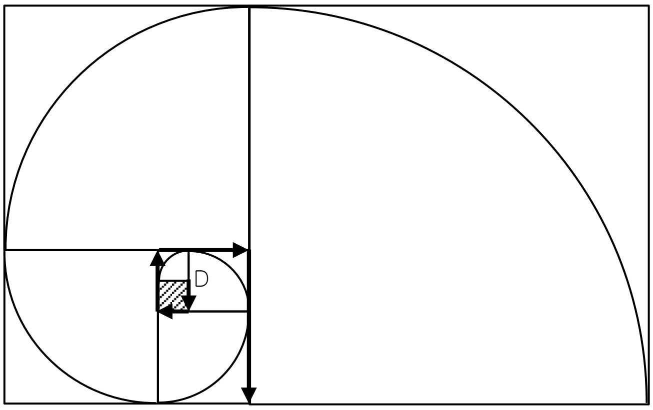
図②



最難関問題

（２）６３４秒後に点Ｐが何番目のおうぎ形の弧を進んでいるかを考えます。１＋２＋３＋５＋８＋…と順に足していくと，１＋２＋３＋５＋８＋…＋２３３＝６０８，６０８＋３７７＝９８５なので，半径が３７７㎝である，１３番目のおうぎ形の弧を進んでいます。おうぎ形の中心の位置は，最初が頂点Ｄで，下に１㎝，左に１㎝，上に２㎝，右に３㎝，下に５㎝と，向きを変えながらフィボナッチ数列の値をとって移動していきます。まとめると，表②のようになります。

図③



表②

右（㎝）		3	21	144
下（㎝）	1	5	34	233
左（㎝）	1	8	55	377
上（㎝）	2	13	89	610

１３番目のおうぎ形の中心は，表②のかげをつけたマスまでの移動なので，
右に３＋２１＋１４４＝１６８（㎝），下に１＋５＋３４＝４０（㎝），左に１＋８＋５５＝６４（㎝），上に２＋１３＋８９＝１０４（㎝）より，
右に１６８－６４＝１０４（㎝），上に１０４－４０＝６４（㎝）移動した位置です。
図④のようになるので，

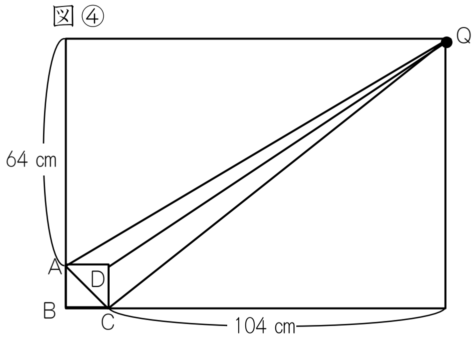
三角形ＡＣＤの面積は１×１×$\frac{1}{2}$＝０.５（$㎝^2$），

三角形ＡＤＱの面積は１×６４×$\frac{1}{2}$＝３２（$㎝^2$），

三角形ＣＤＱの面積は１×１０４×$\frac{1}{2}$＝５２（$㎝^2$），

となるので，０.５＋３２＋５２＝８４.５（$㎝^2$）です。

図④

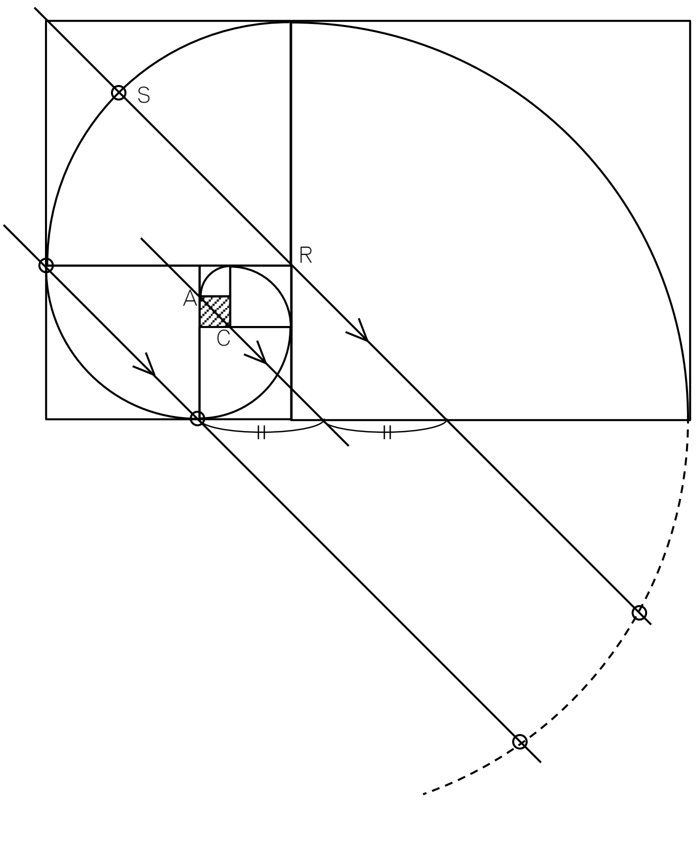


最難関問題

（３）点Ｑはおうぎ形の中心が右に進んだときの中心の位置です。最初におうぎ形の中心が右に進んだときの位置をＲとすると，三角形ＡＣＲと，三角形ＡＣＰの面積が等しくなるのは，等積変形の考えを利用して，ＡＣと平行な２本の直線とおうぎ形の弧の交わる位置に点Ｐが重なる場合で，図⑤の○印の位置になります。この場合，３回目に三角形ＡＣＲとＡＣＰの面積が等しくなるのは，Ｓの位置にＰが重なる場合です。

ＡＣＱについても同様に考えます。１１番目の半径１４４㎝のおうぎ形に注目をすると，図⑥のような位置関係になるので，ＡＣと平行で等しい間隔にある直線Ｌ，ＭのＭ上で，Ｕの位置より前に少なくとも２か所，おうぎ形の弧と交わる位置があります。また，もう１つ内側の周にある，１１－４＝７（番目）のおうぎ形について同様のことを確認すると，交わる点はできません。よって，３回目に三角形ＡＣＰの面積がＡＣＱの面積と等しくなるのは，図⑥のＵの位置です。Ｕの位置は，Ｑを中心とする半径３７７㎝のおうぎ形の弧のちょうど真ん中の点にあたるので，６０８＋３７７÷２＝７９６.５（秒後）です。

図⑤



図⑥