最難関問題

あいこをストックするじゃんけんゲーム（Ｂ）

　Ａ君とＢ君が次のルールでじゃんけんゲームをします。
〇グーは１点，チョキは２点，パーは３点で，勝つとその点数が得点になります。
〇あいこのときは，出した手の点数はストックされ，勝ったときに得点になります。
〇あいこでゲームが終わることはありません。
例えば下の場合，
２回目にＡ君がグーで勝って，あいこの分も含めて２＋１＝３（点）入り，
３回目にＢ君がパーで勝って，あいこの分も含めて２＋３＝５（点）入り，
６回目にＡ君がパーで勝って，あいこの分も含めて１＋１＋３＝５（点）入るので，Ａ君の得点は８点，Ｂ君の得点は５点です。下の表では，得点になったところに影をつけています。

	１回目	２回目	３回目	４回目	５回目	６回目	得点
Ａ君	チョキ	グー	グー	グー	グー	パー	８点
Ｂ君	チョキ	チョキ	パー	グー	グー	グー	５点

（１）４回じゃんけんをしてゲームが終わり，Ａ君の得点が６点，Ｂ君の得点が５点になりました。
　①　最初の２回があいこのとき，２人の手の出し方として考えられるものは何通りありますか。

　②　２人の手の出し方として考えられるものは，全部で何通りありますか。

（２）８回じゃんけんをしてゲームが終わり，Ａ君の得点が２０点，Ｂ君の得点が１０点になりました。
　　２人の手の出し方として考えられるものは，全部で何通りありますか。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

あいこをストックするじゃんけんゲーム（B）　（１）①１０通り　②６２通り　（２）５０１通り

以下では，グーを１，チョキを２，パーを３という点数で表し，勝ちを〇，あいこを△で表します。また，これらを組みあわせて，グーの勝ちを①，グーのあいこを△1，のように表します。

（１）

①　A君，B君ともに得点が入っているので，３回目と４回目で２人は１回ずつ勝っています。

A	△	△	〇		６点
B	△	△		〇	５点

A君が６点取ることから，最初の２回の点数の和は６－３＝３（点）以上で，
B君が５点取ることから，最初の２回の点数の和は５－１＝４（点）以下です。よって，
（１回目，２回目）＝（△3，△1）…並びかえて２通り，（△2，△2）…１通り，（△2，△1）…２通りとなります。A君とB君がどの手で勝つかは最終得点から最初の２回の点数の和を引くことで決まるので，３回目と４回目のどちらでA君とB君が勝ったのかによる２通りの並びかえを行って，
（２＋１＋２）×２＝１０（通り）です。

②　①では，２人とも得点にできたあいこが２回ありました。この点に注目をして場合分けをします。

２人とも得点にできたあいこが０回

A君とB君は別個に６点と５点を得るので，６＝３＋３，５＝３＋２より，２人とも２回のじゃんけんから点数を得ています。

〇あいこがない場合

A君の③・③，B君の③・②の並びかえなので，４×３＝１２（通り）です。

〇あいこがある場合

次の４通りです。

A	③	③		
B			△3	②

A	③	③		
B			△2	③

A			△3	③
B	③	②		

A			△3	③
B	②	③		

よって，１２＋４＝１６（通り）です。

最難関問題

２人とも得点にできたあいこが１回

　２人とも得点にできたあいこの点数で場合分けします。

○△1の場合

　２人とも得点にできたあいこが△1とすると，残り３回のじゃんけんでＡ君は５点，Ｂ君は４点取ることが不可能なので，成り立ちません。

○△2の場合

　△2の場合は，残り３回のじゃんけんのうち２回でＡ君が４点，１回でＢ君が３点取ることになります。
２回目が△2のとき，Ａ君は１回目と３回目か４回目，Ｂ君は３回目か４回目で勝ちます。

A	ア	△2	イ
B		△2	③

（ア，イ）＝（①，③），（②，②），（③，①）のそれぞれの場合にイとＢ君の③の並びかえで２通りなので，３×２＝６（通り）です。

　１回目が△2のときは，残り３回でＡ君が２回勝つ場合，Ａ君の（①，③），（②，②），（③，①）とＢ君の③を並びかえて，３×３＝９（通り）です。

A	△2			
B	△2	③		

また，残り３回で１回あいこになる場合，下のように２回目はＢ君の③，３回目があいこで４回目がＡ君の勝ちなので，（△，○）＝（△1，③），（△2，②），（△3，①）の３通りです。

A	△2		△	○
B	△2	③	△	

　あわせて，６＋９＋３＝１８（通り）です。

最難関問題

〇△3の場合

２回目が△3のとき，（Ａ君，Ｂ君）は（③，①①），（②①，②）の勝ちで得点します。（③，①①）では，３回目か４回目がＡ君の③なので２通り，（②①，②）では４通りなので，２＋４＝６（通り）です。

A		△3		
B		△3		

１回目が△3のときは，残りの３回があいこを含む場合と含まない場合に分けて考えます。あいこを含む場合，以下の３通りです。

A	△3	③	△1	
B	△3		△1	①

A	△3		△1	②
B	△3	②	△1	

A	△3		△2	①
B	△3	②	△2	

あいこを含まない場合，残り３回で（Ａ君，Ｂ君）は（③，①①），（②①，②）の勝ちで得点します。（③，①①）は並びかえて３通り，（②①，②）は並びかえて６通りなので，３＋６＝９（通り）です。

A	△3			
B	△3			

あわせて，６＋３＋９＝１８（通り）です。

以上より，１０＋１６＋１８×２＝６２（通り）です。

（２）まず，２人とも得点にできたあいこの回数を考えます。

２回の場合，△3△3でＡ君は残り２０－３×２＝１４（点），Ｂ君は１０－３×２＝４（点）を別個に得点しなければなりません。Ａ君は少なくとも５回，Ｂ君は２回必要なので，回数がたりません。

４回の場合，Ｂ君の得点が１０点であることから，１０－１＝９（点）を△3△3△2△1などであいこになったうえで，Ｂ君が①で１０点となりますが，残りの３回のじゃんけんでＡ君が２０－９＝１１（点）を取ることは不可能です。

よって，２人とも得点にできたあいこの回数は２回以下でも４回以上でもありません。３回の場合は，

A	△3	△3	△3		③	③	③	②
B	△3	△3	△3	①				

等で条件を満たすことができます。

最難関問題

３回の場合，先の表のように２人とも得点にできたあいこが△3△3△3でＢ君が①，Ａ君が３・３・３・２の場合と，２人とも得点にできたあいこが△3△3△2でＢ君が②，Ａ君が３・３・３・３の場合が考えられます。

$\boxed{\text{２人とも得点にできたあいこが△3△3△3}}$

下の表の２人とも得点にできた△3△3△3とＢ君の①の間に，Ａ君の３・３・３・２が入ります。

A		△3		△3		△3			
B		△3		△3		△3		①	

３・３・３・２のうち○と△が何個あるかでさらに場合分けをします。

・○が４個の場合

A	ア	△3	イ	△3	ウ	△3	エ		オ
B		△3		△3		△3		①	

４個の○をア～オに配置した場合から，ア～ウに配置した場合を引きます。

４個の○をア～オに配置する方法は以下の通りです。

４個とも同じところ…５通り

３個と１個…５×４＝２０（通り）

２個と２個…$\dfrac{5\times4}{2\times1}$＝１０（通り）

２個と１個と１個…５×$\dfrac{4\times3}{2\times1}$＝３０（通り）

１個と１個と１個と１個…５通り

あわせて５×２＋２０＋１０＋３０＝７０（通り）です。

４個の○をア～ウに配置する方法は以下の通りです。

４個とも同じところ…３通り

３個と１個…３×２＝６（通り）

２個と２個…$\dfrac{3\times2}{2\times1}$＝３（通り）

２個と１個と１個…３通り

１個と１個と１個と１個…不可能

あわせて３×３＋６＝１５（通り）です。

よって，７０－１５＝５５（通り）です。

最難関問題

・○が３個で△が１個の場合

A	ア	△3	イ	△3	ウ	△3	エ		オ	△	カ	○
B		△3		△3		△3		①				

残り２個の○をア～カに配置します。２個の○をア～カに配置する方法は以下の通りです。

２個とも同じところ…６通り

１個と１個…$\frac{6\times5}{2\times1}$＝１５（通り）

よって，６＋１５＝２１（通り）です。

・○が２個で△が２個の場合

A	ア	△3	イ	△3	ウ	△3	エ		オ	△	カ	△	キ	○
B		△3		△3		△3		①						

残り１個の○をア～キに配置するので，７通りです。

・○が１個で△が３個の場合

A	△3	△3	△3		△	△	△	○
B	△3	△3	△3	①				

表の１通りです。

以上より，○と△の配置は５５＋２１＋７＋１＝８４（通り）あります。○と△にはいる３・３・３・２の並びかえは４通りあるので，８４×４＝３３６（通り）です。

$\boxed{\text{２人とも得点にできたあいこが△3△3△2}}$

下の表の２人とも得点にできた△3△3△2とＢ君の②の間に，Ａ君の③が４個が入ります。

A	ア	△3	イ	△3	ウ	△2	エ		オ
B		△3		△3		△2		②	

○を４個は位置する方法は，上で求めた５５通りです。△3△3△2の並びかえが３通りあるので，５５×３＝１６５（通り）です。

以上より，３３６＋１６５＝５０１（通り）です。