受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

数表と剰余・２

図１のように整数を並べた表があります。図１の表の整数を１から順に，３で割った余りを図２のように書いていきます。図２は２０を割った余りまで書いた状態を表しています。このとき，数の並びが線対称となっているひし形は，図３に示した４種類がそれぞれ１個ずつ，あわせて４個あります。以下の問いに答えなさい。

図１

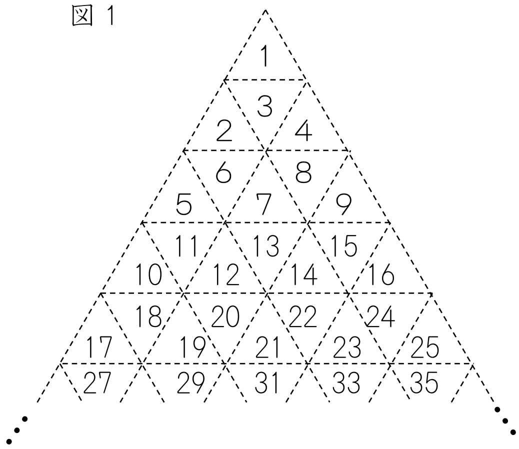


図２

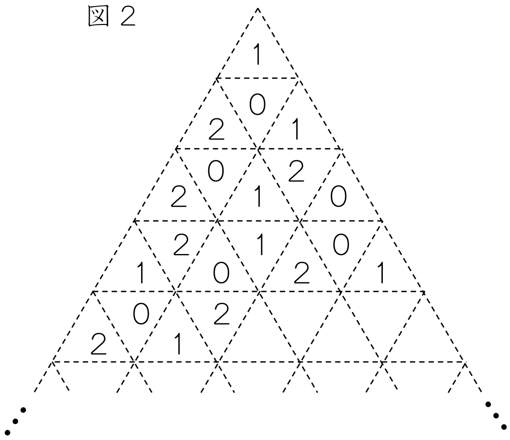
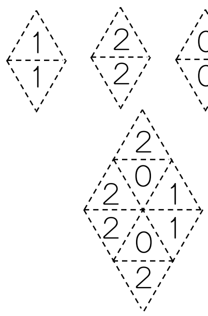
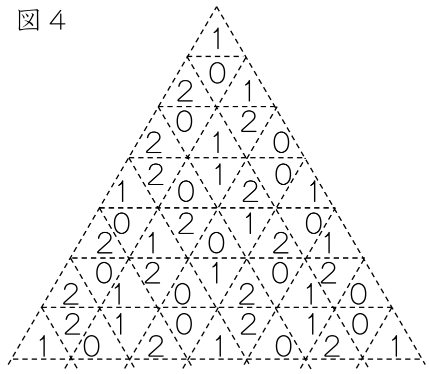


図３



（１）図１の表の３６まで，３で割った余りを書くと図４のようになります。このとき，数の並びが線対称となっているひし形は何個ありますか。

図４



（２）図１の表の整数を１から４００まで，３で割った余りを書いたとき，数の並びが線対称となっているひし形は何個ありますか。

（３）図１の表の整数を１から順に，１４で割った余りを書いていったとき，数の並びが線対称となっているひし形が７７７個になるのは，どの整数を１４で割った余りを書いたときですか。

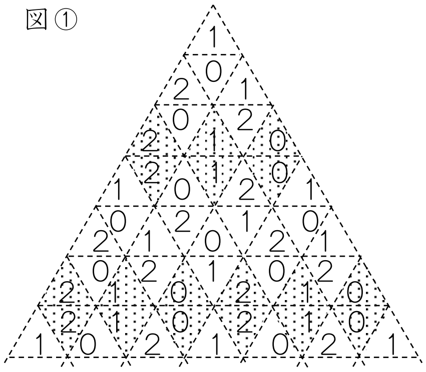
受験算数の基礎

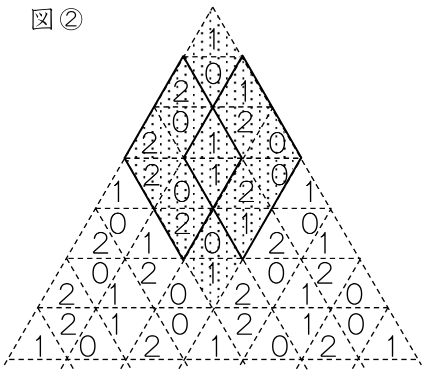
Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

数表と剰余・２　（１）１２個　（２）２４０個　（３）１５６５

（１）図①の９個と図②の３個をあわせて１２個です。

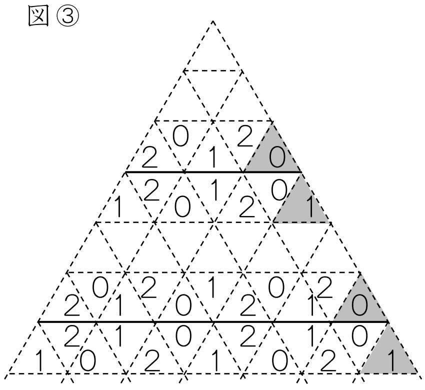
図①


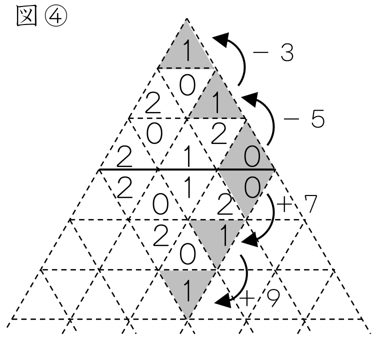
図②


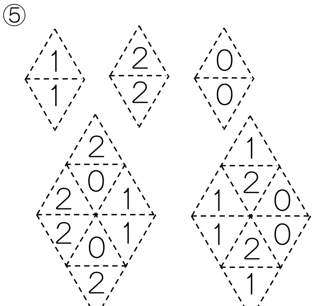
（２）（１）においてひし形の数字の並びの「対称の軸」になっているのは，図③で実線で示した，３段目と６段目の下の線です。３段目と４段目，６段目と７段目の右端の数を比べると，どちらも下の段の方が１大きくなっているので，実線を挟んで上の段と下の段の数の並びは線対称になっています。

ここで３段目の下の線が対称の軸となるひし形に注目をすると，図④のようになります。ひし形の右端のマスに注目をすると，３段目と４段目は同じ剰余が書かれており，２段目と５段目はあわせて５＋７＝１２（マス）離れているので，１２が３の倍数であることから，やはり同じ剰余が書かれています。１段目と６段目も同じ剰余から３＋９＝１２（マス）離れているので，同じ剰余になります。このようにして図④のひし形は数の並びが線対称になるので，その内側にあって，３段目の下の線が対称の軸となる図⑤のひし形も数の並びが線対称になります。

このようにして，上の段と下の段の右端の数を比べると下の段の方が１大きくなっているとき，その境の線を対象の軸とするひし形は，すべて数の並びも線対称になります。

図③


図④


図⑤


最難関問題

図１の数表の右端の数は１，４，９，１６，…と平方数です。平方数を３で割ったときの剰余は，下の表のように１，１，０の周期になります。そして，影をつけた，周期の境の部分で剰余は１つ大きくなるので，数の並びが線対称になります。

1	4	9	16	25	36	49	64	…
1	1	0	1	1	0	1	1	…

周期の境は３の倍数の段の下の線にあたるので，４０＝２０×２０より，２０段目より上にある，３の倍数の段に注目をします。

３段目

図④と図⑤の６個のひし形が数の並びが線対称です。ここで，ひし形の大きさと個数の関係を見ておきます。２マスのひし形は３＋１＝４（段目）に一番下のマスがあり，３個あります。８マスのひし形は３＋２＝５（段目）に一番下のマスがあり，２個あります。１８マスのひし形は３＋３＝６（段目）に一番下のマスがあり，１個あります。どのひし形も２０段目までの範囲にあるので，あわせて
３＋２＋１＝６（個）です。

６段目

一番大きいひし形は６＋６＝１２（段目）に一番下のマスがあるので，どのひし形も２０段目までの範囲におさまります。よって，６＋５＋４＋３＋２＋１＝２１（個）です。

９段目

一番大きいひし形は９＋９＝１８（段目）に一番下のマスがあるので，どのひし形も２０段目までの範囲におさまります。よって，９＋８＋７＋６＋５＋４＋３＋２＋１＝４５（個）です。

１２段目

１２＋８＝２０（段目）に一番下のマスがあるひし形までが範囲におさまるので，
１２＋１１＋１０＋９＋８＋７＋６＋５＝６８（個）です。

１５段目

１５＋５＝２０（段目）に一番下のマスがあるひし形までが範囲におさまるので，
１５＋１４＋１３＋１２＋１１＝６５（個）です。

１８段目

１８＋２＝２０（段目）に一番下のマスがあるひし形までが範囲におさまるので，
１８＋１７＝３５（個）です。

以上より，６＋２１＋４５＋６８＋６５＋３５＝２４０（個）です。

最難関問題

（３）図１の数表の右端の平方数を１４で割ったときの剰余は，下の表のように，$\boxed{\text{１，４，９，２，１１，８，７，８，１１，２，９，４，１，０}}$の周期になります。そして，影をつけた部分で剰余は１つ大きくなるので，数の並びが線対称になります。

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
1	4	9	2	11	8	7	8	11	2	9	4	1	0	1

影を付けた部分は，７の倍数段目の下の線です。例えば７段目の下の線を対称の軸とするひし形は，一番小さい２マスのひし形が７個，２番目の８マスのひし形が６個，…，最も大きいひし形が１個あります。また，それぞれのひし形の最も下に位置するマスは，８段目，９段目，…，１４段目となります。このことを２８段目の下にある対称の軸までまとめると，次のようになります。

７段目	８～１４段目	７＋６＋…＋１＝２８
１４段目	１５～２８段目	１４＋１３＋…＋１＝１０５
２１段目	２２～４２段目	２１＋２０＋…＋１＝２３１
２８段目	２９～５６段目	２８＋２７＋…＋１＝４０６

２８＋１０５＋２３１＋４０６＝７７０ですが，実際には５６段目までには，３５段目や４２段目を対称の軸とするひし形も含まれるので，もっと手前でひし形の個数は７７７を超えます。そこで，３５段目までにあるひし形の個数を求めると，次のようになります。

７段目	８～１４段目	７＋６＋…＋１＝２８
１４段目	１５～２８段目	１４＋１３＋…＋１＝１０５
２１段目	２２～３５段目	２１＋２０＋…＋８＝２０３
２８段目	２９～３５段目	２８＋２７＋…＋２２＝１７５

ここまでで，２８＋１０５＋２０３＋１７５＝５１１（個）です。３６段目からは，３５段目の下の線を対称の軸とするひし形が現れます。２１，２８，３５段目の下の線を対称の軸とするひし形の個数は，３６段目以降次のように増えていきます。

	３６段目	３７段目	３８段目	３９段目	４０段目
２１段目	７	６	５	４	３
２８段目	２１	２０	１９	１８	１７
３５段目	３５	３４	３３	３２	３１
計	６３	６０	５７	５４	５１

最難関問題

５１１＋６３＋６０＋５７＋５４＝７４５より，３９段目までででひし形は７４５個で，あと７７７－７４５＝３２（個）増えると７７７個になります。

４０段目には，図⑥のように下向きの正三角形のマスが３９個あります。

図⑥

４０段目

これら３９個のうちで，
２１段目を対称の軸とするひし形は１９，２０，２１番目の３個，
２８段目を対称の軸とするひし形は１２～２８番目の１７個，
３５段目を対称の軸とするひし形は５～３５番目の３１個あります。
よって，２２番目までに3＋（２２－１２＋１）＋（２２－５＋１）＝３２（個）あります。下向きの２２番目のマスは，上向きのマスも含めて数えると４０段目の４４番目のマスにあたるので，もともとの図１の表において書かれていた数は，３９×３９＋４４＝１５６５です。