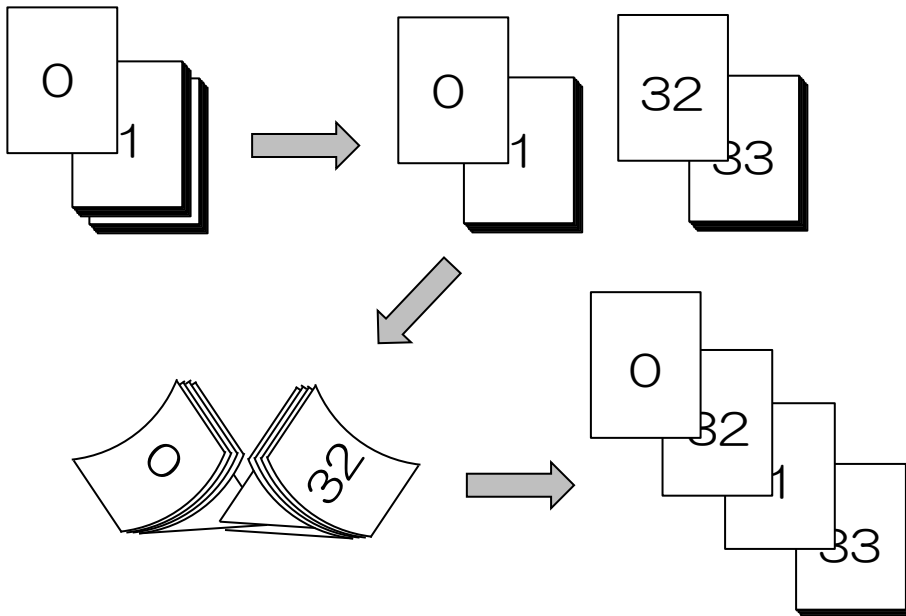


リフルシャッフル

0, 1, 2, ...と数字の書かれたカードが偶数枚あり, 数字の小さい順に上から積んであります。カードを上半分と下半分に分け, 1枚ずつ交代で上から並ぶようにきります。このようなカードの切り方をリフルシャッフルといいます。例えば, 0~63の64枚のカードがある場合は, 1回リフルシャッフルをすると, 以下ようになります。



- (1) 64枚のカードがある場合, 次の数字の1, 2, 3のカードは, それぞれ何回リフルシャッフルをすると最初の位置にもどりますか。
- (2) 22枚のカードがある場合, 次の数字の1, 2, 3のカードは, それぞれ何回リフルシャッフルをすると最初の位置にもどりますか。
- (3) すべてのカードが最初の位置にもどるためのリフルシャッフルの最少の回数が8回のとき, カードは何枚ありますか。考えられる枚数をすべて答えなさい。

リフルシャッフル

(1) 1…6回 2…6回 3…6回 (2) 1…6回 2…6回 3…3回

(3) 18枚, 52枚, 86枚, 256枚

(1) 1のカードは1回リフルシャッフルをすると, 上から3枚目, つまり, 最初に2のカードがあった位置に移ります。このことを $1 \rightarrow 2$, と表すと, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32$ となり, 32の位置のカードは例にあるようにリフルシャッフルをすると1のカードの位置に移ります。つまり, $32 \times 2 = 64$, $64 - 63 = 1$ という計算が成立します。よって, 6回です。

2のカードは $2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ となるので6回です。

3のカードは $3 \rightarrow 6 \rightarrow 12 \rightarrow 24 \rightarrow 48$ となって, $48 \times 2 - 63 = 33$, $33 \times 2 - 63 = 3$ となるので, 6回です。

(2) 1のカードは, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16$ となり, $16 \times 2 - 21 = 11$, $11 \times 2 - 21 = 1$ となるので, 6回です。

2のカードは, $2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 11 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ となるので, 6回です。

3のカードは, $3 \rightarrow 6 \rightarrow 12 \rightarrow 3$ となるので, 3回です。

(3) 2つのポイントに分けて解説します。

1のカードが最初の位置にもどる回数だけ考えればよいこと

(1)(2)では, 6回のシャッフルによって1のカードの位置は $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$ (倍) されます。ただし, (1)では63, (2)では21を超えるごとに引き算されるので, 最初の1の位置にもどります。他のどのカードも同様に64倍されるので, もとの位置にもどります。ただし, (2)の3のカードのように6の約数の回数で最初の位置にもどるカードもあります。例えば0のカードは1回の操作で最初の位置にもどると考えられます。

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$ (倍) で最初の位置にもどればよいこと

$256 - 1 = 255$ より, 最後のカードの数字が255の約数の場合を考えます。255の約数は, 1, 3, 5, 15, 17, 51, 85, 255です。1, 3, 5の場合カードの枚数は8より少ないので, 確実に8回より少ない回数で全てのカードが最初の位置にもどります。15の場合は, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 1$ となって4回で全てのカードが最初の位置にもどります。

17の場合は, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 13 \rightarrow 9 \rightarrow 1$ となって8回です。

51の場合は, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 13 \rightarrow 26 \rightarrow 1$ となって8回です。

85の場合は, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \rightarrow 43 \rightarrow 1$ となって8回です。

255の場合は, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \rightarrow 128 \rightarrow 1$ となって8回です。

よって, 18枚, 52枚, 86枚, 256枚です。