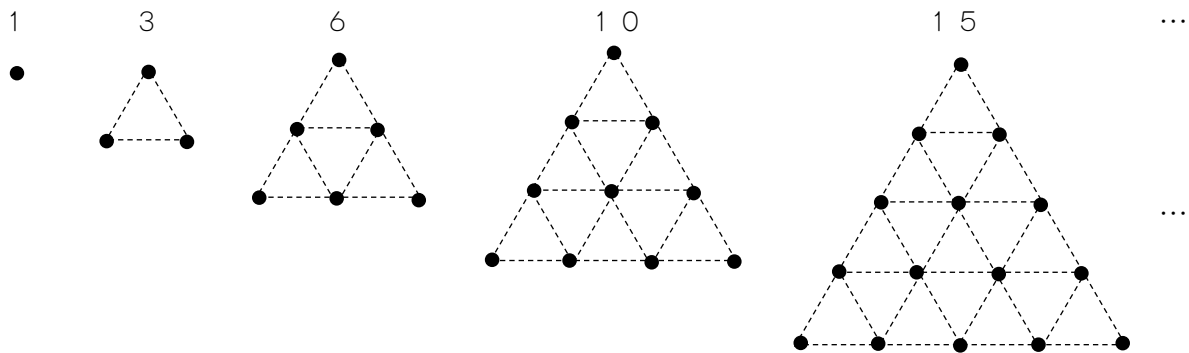


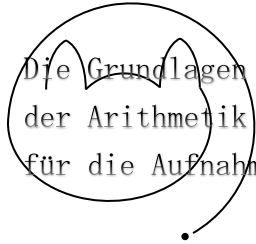
# 最難関問題

## 三角数と剰余

ご石を下のように三角形の形に並べていくときに使うご石の個数を三角数といいます。三角数は1番目から順に、1, 3, 6, 10, 15, ...となります。



128で割ると96余る三角数のうち、小さいほうから1, 2, 100番目が、それぞれ何番目の三角数であるか、求めなさい。



## 最難関問題

三角数と剰余 63番目, 127番目, 6399番目

三角数は,  $1, 1+2=3, 1+2+3=6, 1+2+3+4=10, 1+2+3+4+5=15$  というように,  $1$  からある整数  $\square$  までの和にあたります。よって,  $(1+\square) \times \square \div 2$  という式で表すことができます。

$$\square \text{ が奇数の場合, } (1+\square) \text{ が偶数なので, } (1+\square) \times \square \div 2 = \underbrace{\frac{1+\square}{2}}_{\text{整数}} \times \underbrace{\square}_{\text{奇数}}$$

$$\square \text{ が偶数の場合, } (1+\square) \times \square \div 2 = \underbrace{(1+\square)}_{\text{奇数}} \times \underbrace{\frac{\square}{2}}_{\text{整数}}$$

となります。

$128$  と  $96$  の最大公約数は  $32$  で,  $128 = 32 \times 4, 96 = 32 \times 3$  なので,  $128$  で割って  $96$  余る数は,  $32 \times (4 \times \bigcirc + 3)$  という式で表すことができる  $32$  の倍数で,  $\bigcirc$  には  $0$  以上の整数が入ります。

$\square$  が偶数の場合は  $\frac{\square}{2}$  が  $32$  の倍数ですから,  $\square$  は  $64$  の倍数です。よって,  $\square$  は  $4$  の倍数でもあり,

$1+\square$  は  $4$  で割ると  $1$  余る整数です。したがって,  $(1+\square) \times \frac{\square}{2}$  は  $32 \times (4 \times \bigcirc + 3)$  という式で表すことができません。

$\square$  が奇数の場合は  $\frac{1+\square}{2}$  が  $32$  の倍数ですから,  $(1+\square)$  は  $64$  の倍数です。よって,  $(1+\square)$  は  $4$

の倍数でもあり,  $\square$  は  $4$  の倍数より  $1$  小さいので,  $4$  で割ると  $3$  余る整数です。したがって,  $\frac{1+\square}{2} \times \square$  は  $32 \times (4 \times \bigcirc + 3)$  という式で表すことができます。 $\square$  は小さい順に,  $64 - 1 = 63, 64 \times 2 - 1 = 127, 64 \times 3 - 1 = 191, \dots, 64 \times 100 - 1 = 6399$  となるので,  $63$  番目,  $127$  番目,  $6399$  番目です。