

最難関問題

電灯光と逆比

図1のように3つの小さな玉を1 mおきに取り付けた棒を用意します。街灯の近くにこの棒を地面にまっすぐに立て、地面にできる玉の影を観察します。小さな玉、玉の影、電灯の光る部分の大きさは考えません。

(1) 図2のように街灯アの近くに棒を立てたところ、玉BとCの影の間の距離と、玉AとBの影の間の距離の比が15 : 19になりました。街灯アの高さを求めなさい。

(2) 図3のように街灯イの近くに、街灯イから一直線上に棒を2.4 m離して2本立てたところ、玉DとIの影の間の距離が1.65 mになり、玉DとEの影の間の距離と玉HとIの影の間の距離の比が3 : 4になりました。

- ① 街灯の立っている所から玉Iの影までの距離は何mですか。
- ② さらに、玉FとGの影の間の距離が4.29 mで、玉EとFの影の間の距離と玉GとHの影の間の距離の比が12 : 25であることもわかりました。街灯イの高さを求めなさい。

図1

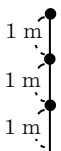


図2

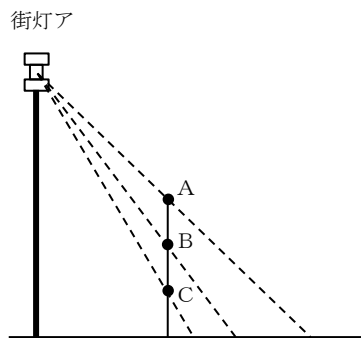
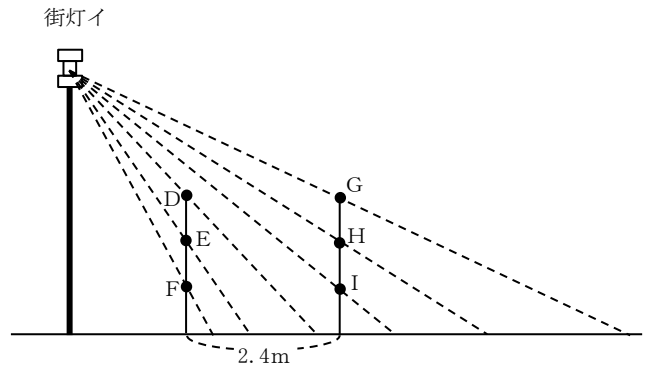


図3

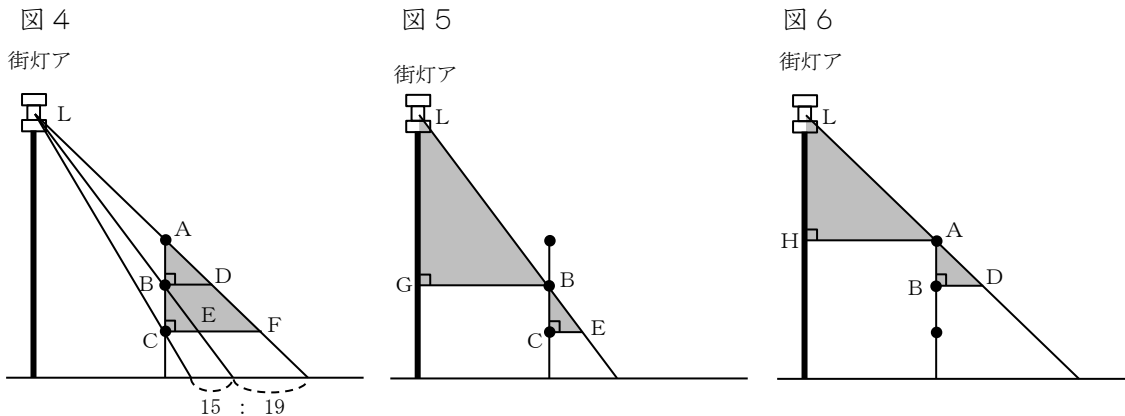


最難関問題

電灯光と逆比 (1) 10.5 m (2) ① 6.6 m ② 11 m

(1) 図4のようにBとCを通過して地面に平行な線(正確には地面と平行で、のばすと街灯と交わる線)を引き、光源Lとそれぞれの玉を結ぶ線と交わる点をD、E、Fとします。このとき、 $CE : EF = 15 : 19$ となります。また、BDの長さはCFの長さの半分ですから、 $CE : BD = 15 : (15 + 19) \div 2 = 15 : 17$ となります。よって、三角形BCEと三角形ABDは、高さが等しいときに底辺の長さの比が15 : 17となります。

図5において、Bを通過して地面と平行な線と街灯の交わる点をGとすると、三角形BCEとLGBは相似です。また、図6においてCを通過して地面と平行な線と街灯の交わる点をHとすると、三角形ABDとLHAは相似です。

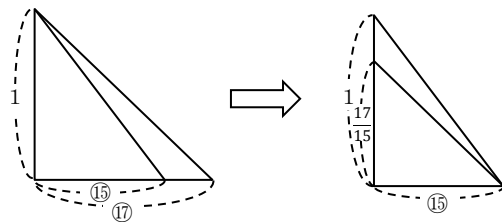


G BとH Aの長さは等しいので、G LとH Lの長さの比は15 : 17の逆比の17 : 15となります。

理由 高さが1で底辺の長さが⑮と⑰の2つの三角形があると考えます。底辺が⑰の三角形

と相似で底辺が⑮の三角形は、17 : 15の相似比によって高さが $\frac{15}{17}$ になるので、

高さの比は $1 : \frac{15}{17} = 17 : 15$ となります。



$GH = 1$ mが比の差の $17 - 15 = 2$ にあたりますから、L Gの長さは $1 \times \frac{17}{2} = 8.5$ (m)です。

点Gは地面から2 mの高さにありますから、街灯の高さは $8.5 + 2 = 10.5$ (m)です。

最難関問題

(2)

① 図7においてウとエの長さの比は3：4です。ここで、EHが地面と平行であることから、影をつけた三角形DEJとHIKに注目します。EJとKHの長さの比はウ：エに等しく3：4となります。また、DE=HI=1mですから、高さが等しいときに三角形DEJに相似な三角形と三角形HIKに相似な三角形の底辺の長さの比は3：4となります。

図8のように街灯が立っている地点をM、Dの影をN、Iの影をOとすると、三角形LMNは三角形DEJと相似になり、三角形LMOは三角形HIKと相似になります。三角形LMNとLMOは高さLMが等しいので、MN：MO=3：4です。比の差の4-3=1が1.65mですから、MOの長さは

$$1.65 \times \frac{4}{1} = 6.6 \text{ (m) です。}$$

図7
街灯イ

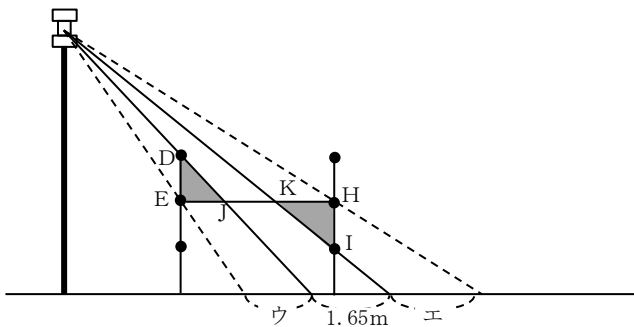
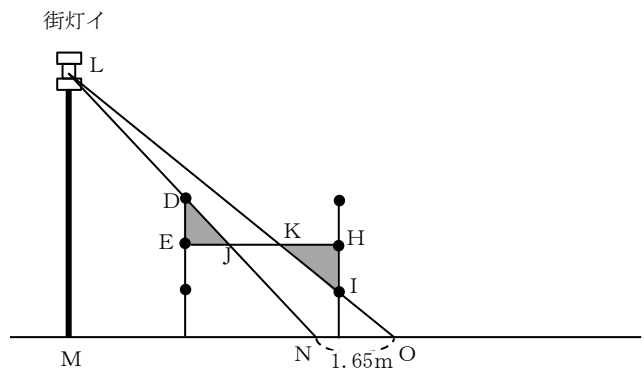


図8



最難関問題

② まずは①と同様に考えます。図9においてオとカの長さの比は12 : 25です。EHが地面と平行であることから、影をつけた三角形EFPとGHQに注目します。PEとHQの長さの比はオ : カに等しく12 : 25となります。また、EF = GH = 1mですから、高さが等しいときに三角形EFPに相似な三角形と三角形GHQに相似な三角形の底辺の長さの比は12 : 25となります。

図10のようにFの影をR、Gの影をSとすると、三角形LMRは三角形EFPと相似になり、三角形LMSは三角形GHQと相似になります。三角形LMRとLMSは高さLMが等しいので、MR : MS = 12 : 25です。比の差の25 - 12 = 13が4.29mですから、MRの長さは $4.29 \times \frac{12}{13} = 3.96$ (m) です。

図9

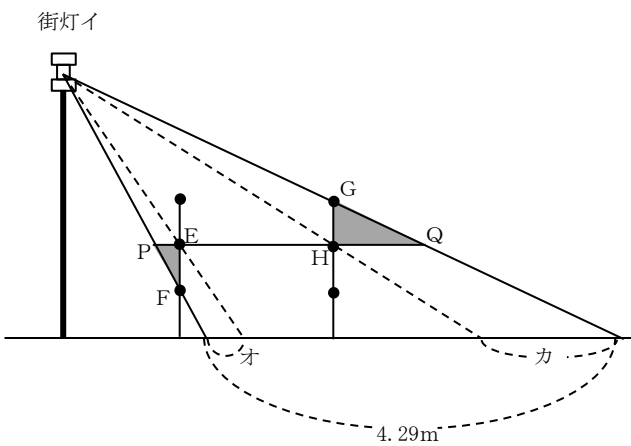
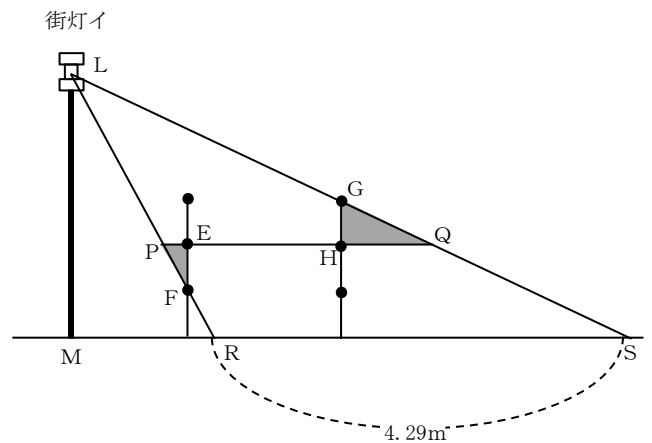


図10



MR = 3.96 m, MO = 6.6 mであることから、図11のようにRO = 6.6 - 3.96 = 2.64 (m) になります。ここで、三角形LFIと三角形LROの相似に注目します。相似比はFI : RO = 2.4 : 2.64 = 10 : 11より10 : 11ですから、三角形LFIとLROの高さの比も11 : 10になります。比の差の11 - 10 = 1が1mにあたりますから、三角形LROの高さは11mです。三角形LROの高さは街灯イの高さに他ならないので、街灯イの高さは11mです。

図11

