

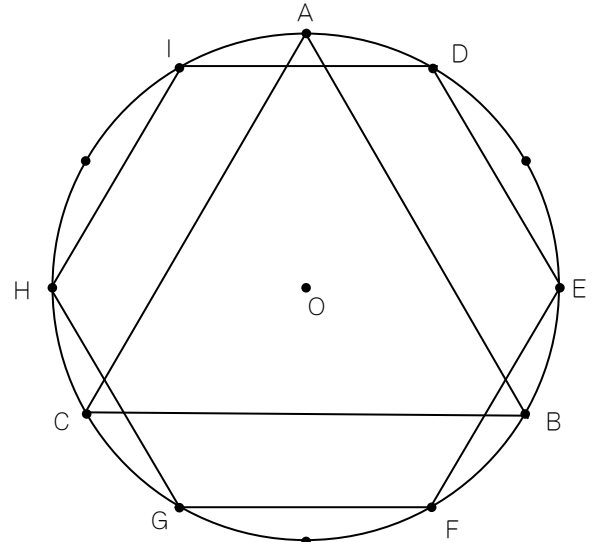
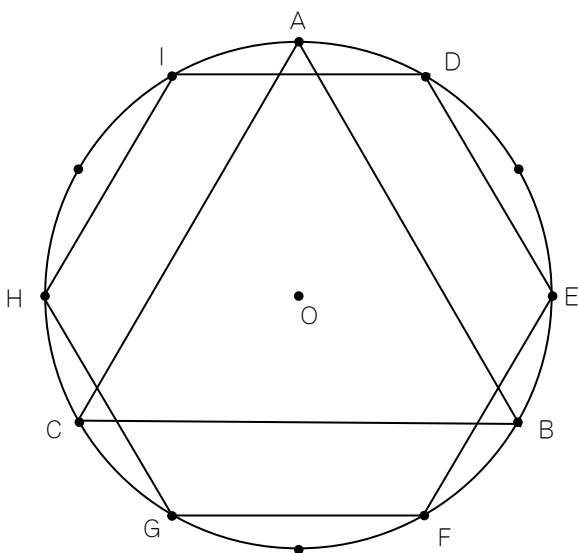
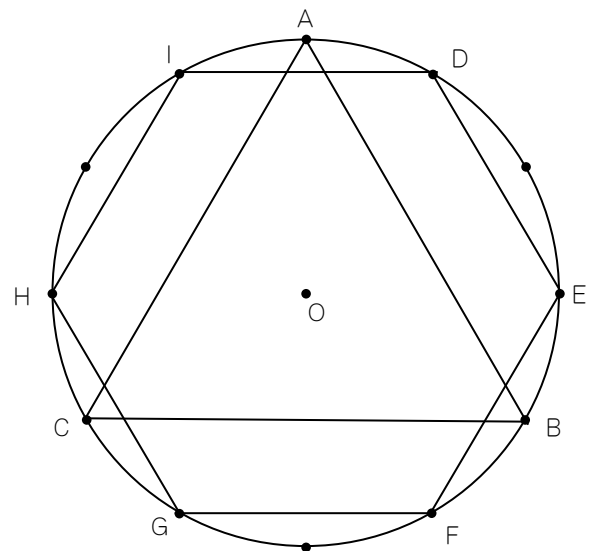
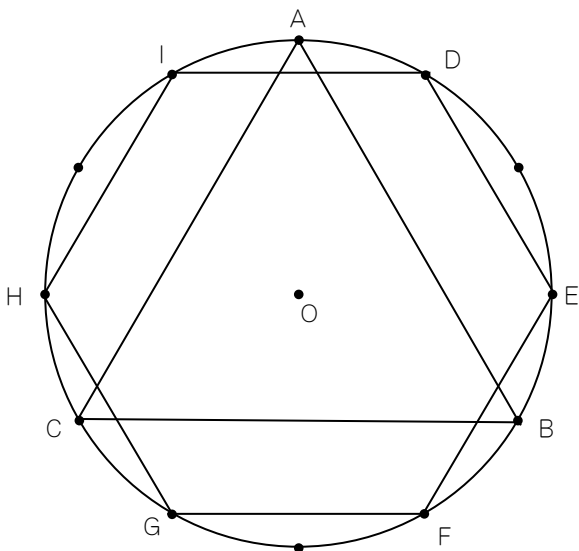
最難関問題

面積の大小と頂点の範囲・2

下の図は円周を12等分する点と中心Oをかいた円に、正三角形ABCと正六角形DEFGHIをかいたものです。

(1) 三角形ABCの内部に点Pをとって、三角形BCPの面積が三角形FGPの面積より大きくなるようにします。点Pの位置として考えることができる範囲の面積は、三角形ABCの面積の何倍ですか。

(2) 円の内部に点Pをとって、三角形BCPの面積が三角形EFPの面積より大きくなるようにします。点Pの位置として考えることができる範囲を1組の三角定規を用いて作図し、斜線で示しなさい。図形は練習用も含めて余分に書いてあります。



最難関問題

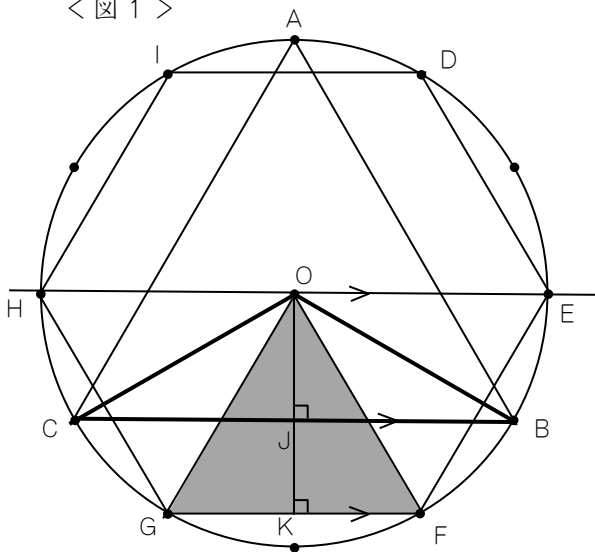
面積の大小と頂点の範囲・2 (1) $\frac{4}{9}$ 倍 (2) 解説の<図6>参照

(1) <図1>において、三角形BCOとFGOの面積は等しくなっています。ここで、直線EHを引くと、点Oを通過して辺BCやFGと平行な直線になります。点Pを直線EH上にとると、三角形BCPとFGPの面積は等しくなります。

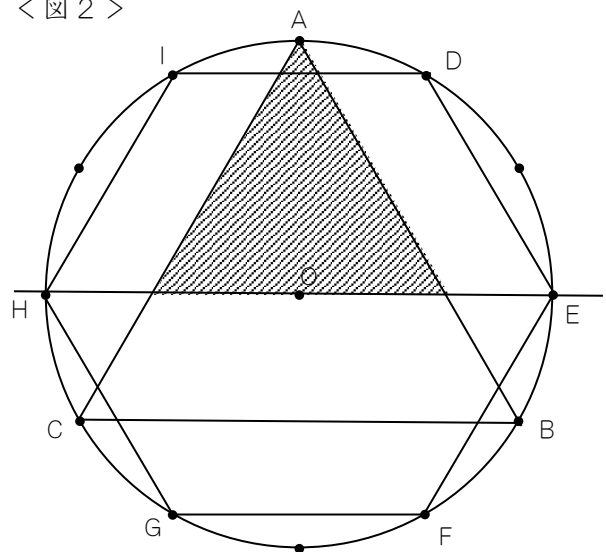
点Pを直線EHよりもAに近い範囲にとると、三角形BCPの高さはOJより長く、三角形FGPの高さはOKより長くなるのでどちらの三角形の面積も大きくなりますが、OJに対する三角形BCPの高さの割合の方が、OKに対する三角形FGPの高さの割合よりも大きいので、三角形BCPの方が三角形FGPよりも面積が大きくなります。よって、<図2>の斜線部分が点Pの範囲です。斜線部分は

正三角形で、三角形ABCと相似比が2:3となるので、面積は $\frac{2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{4}{9}$ (倍) です。

<図1>



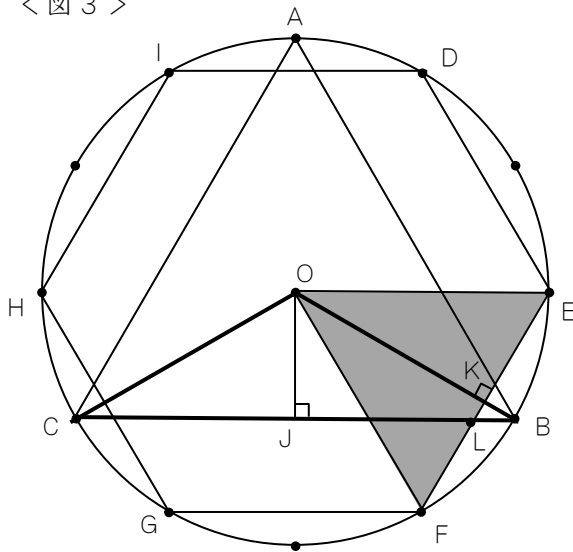
<図2>



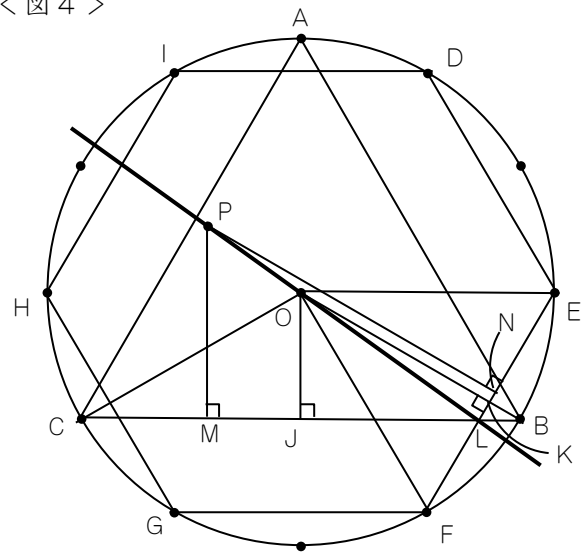
最難関問題

(2) <図3>において点Oの位置に点Pを重ねると、三角形BCPとEFPの面積は等しくなります。また、BCとEFの交点Lの位置に点Pを重ねると、三角形BCPとEFPの面積はどちらも 0 cm^2 になるので、やはり等しくなります。ここで、<図4>のように直線LOを引きます。LO上に点Pをとると、 $PM:OJ=PN:OK$ となるので、三角形BCPとEFPの高さは、同じ割合で変化します。よって、三角形BCPとEFPの面積は等しくなります。

<図3>



<図4>

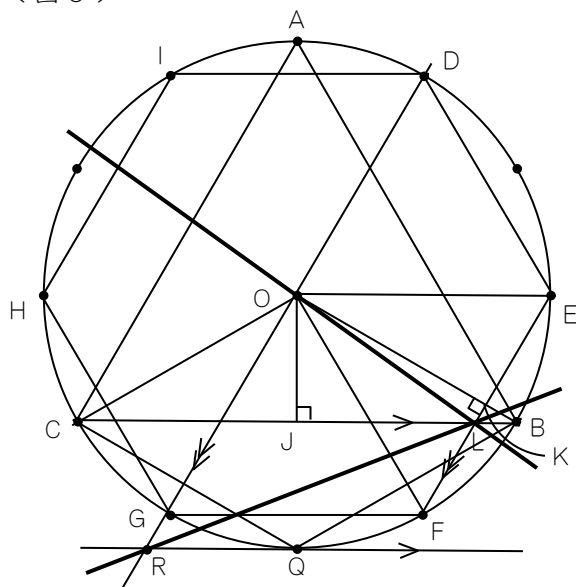


最難關問題

続いて、三角形BCOとBCQの面積が等しい点に注目をして<図5>のように平行線を2本引き、その交点をRとします。三角形BCRの面積は三角形BCOと等しく、三角形EFRの面積は三角形EFOと等しいので、Rの位置にPを重ねても、三角形BCPとEFPの面積は等しくなります。

直線 LR 上に点 P を取っても、上の場合と同様にして三角形 BCP と EPF の面積は等しくなるので、直線 LO と LR によって区切られた、 $\triangle OPR$ の範囲が答えとなります。

< 図 5 >



< 図 6 >

