受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

円内部の正方形の平行移動

図１のように，半径６cmの円の内部に１辺の長さが３cmの正方形を入れ，向きを変えることなくいずれかの頂点が円周に接するように円の内部を１周させます。このとき，正方形が通過した部分の，内周の長さは何cmですか。

ただし，ここで言う内周とは，ドーナッツ状の図形の内側の長さのことです。例えば図２の影をつけた図形の場合，内周は内側の楕円（だえん）の周の長さ，図３の影をつけた図形の場合，内周は内側の階段状の図形の周の長さです。円周率は３.１４とします。

図１

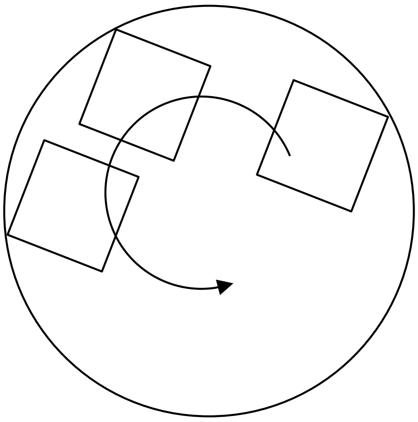


図２

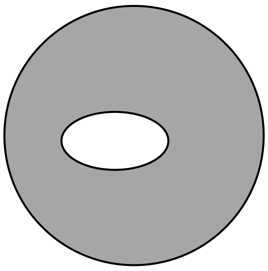
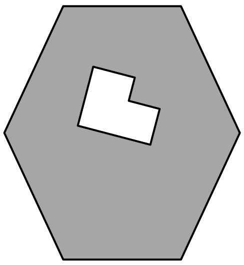


図３



最難関問題

円内部の正方形の平行移動　１２.５６㎝

　正方形の４つの頂点をＡ，Ｂ，Ｃ，Ｄとします。円は向きを変えても完全に重なって見えるので，円に対する正方形の向きを図４のようにして考えます。図５において㋐の位置から，頂点ＣとＤが円周に接する㋑の位置まで動くとき，一番内側にある頂点Ａが動いたあとは，頂点Ｃが動いたあとと平行になりますから，長さも形も等しくなります。図６のように，㋑の位置から㋒の位置に正方形が動くときに頂点Ｂが動いたあとを重ねると，図５でＡが動いたあとをあらわす太線の一部が，正方形が通過した部分の内周の一部になることがわかります。

図４

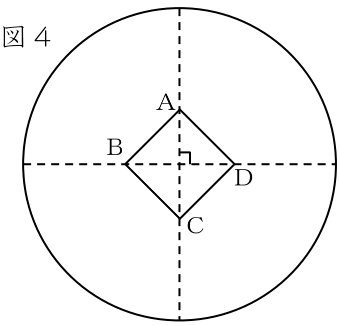


図５

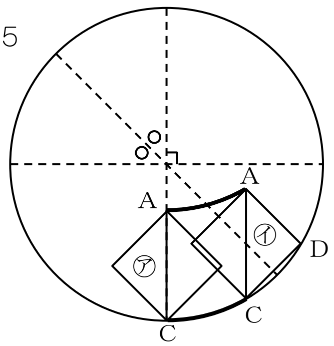


図６

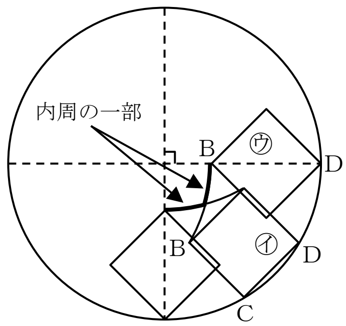


　図７では，図６の頂点ＡとＢが動いたあとが重なる点をＥ，頂点Ａが点Ｅと重なる位置を㋓，頂点Ｂが点Ｅと重なる位置を㋔，正方形が㋐の位置にあるときに頂点Ｃと重なる点をＨ，正方形が㋓の位置にあるときに頂点Ｃと重なる点をＦ，正方形が㋔の位置にあるときに頂点Ｄと重なる点をＧとしています。このとき，頂点Ａが㋐の位置から㋓の位置に動くときに頂点Ａが動いたあとは，円周の一部ＨＦと平行になりますから，長さも形も等しくなります。よって，円周の一部ＨＦの長さを求めることができれば，正方形が動いたあとの内周を求めることができます。㋓と㋔の位置の正方形は辺がぴったりと重なるので，図８で影をつけた三角形ＥＦＧは，ＦＧ＝６㎝の直角二等辺三角形になります。よって，円の中心をＯとすると，図９で影をつけた三角形ＯＦＧは正三角形になります。ここで，円周の一部ＨＦの長さは，半径が６㎝で中心角の大きさが，（９０－６０）÷２＝１５（度）のおうぎ形の弧の長さに等しくなります。

図７

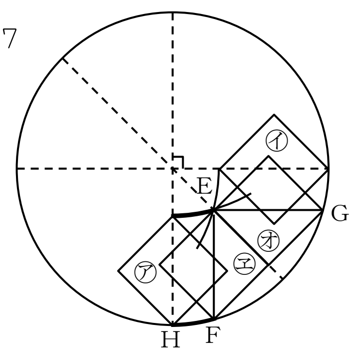


図８

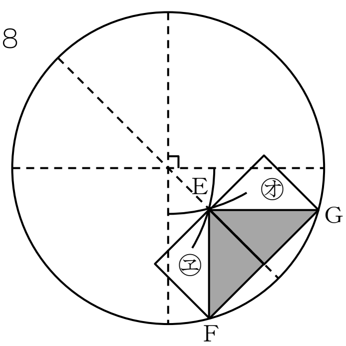
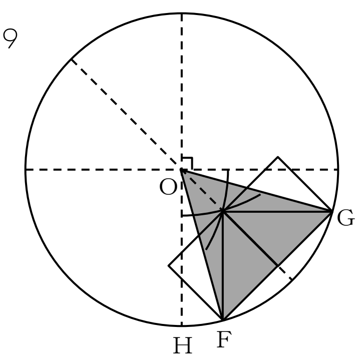


図９



最難関問題

以上から，正方形が動いたあとの内周は，図１０の太線の長さになります。太線はそれぞれ，影をつけた半径が６㎝で中心角の大きさが１５×２＝３０（度）のおうぎ形の弧の長さと等しいので，内周の長さは，

$$6\times2\times3.14\times\frac{30\times4}{360}=12.56$$（㎝）です。

図１０