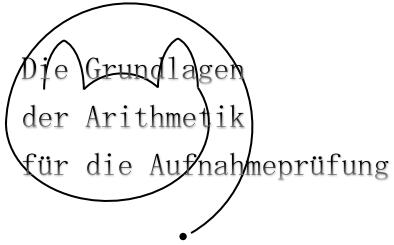


受験算数の基礎



最難関問題

2020の問題・10

次のように、ある規則にしたがって、分数が左から順に並んでいます。

$$\frac{1}{2020}, \frac{1+2}{2020}, \frac{1+2+3}{2020}, \frac{1+2+3+4}{2020}, \dots$$

次の問い合わせに答えなさい。

- (1) 約分しない場合、分子が2の倍数になる、小さい方から8番目の分数は、左から何番目に並んでいますか。
- (2) 小さい方から数えて181番目の既約分数は、左から何番目に並んでいますか。
- (3) 約分しつくすと分母が101になる、小さい方から数えて600番目の分数は、左から何番目に並んでいますか。

受験算数の基礎



最難関問題

2020の問題・10 (1) 16番目 (2) 618番目 (3) 8160番目

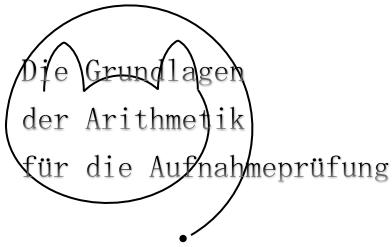
(1) 分子を順番に計算していくと、次のようにになります。

左からの順番	1	2	3	4	5	6	7	8
分子	1	3	6	10	15	21	28	36

左からの順番	9	10	11	12	13	14	15	16
分子	45	55	66	78	91	105	120	136

分子が2の倍数になる部分に影をつけています。よって、16番目です。

受験算数の基礎



最難関問題

(2) $2020 = 2 \times 2 \times 5 \times 101$ ですから、分子が 2, 5, 101 いずれの倍数でもない場合に、既約分数になります。(1) で調べた 2 の倍数には明らかに規則性がありますから、その仕組みを考えてみます。n 番目の分数の分子は、 $1 + 2 + 3 + \dots + n = (1 + n) \times n \div 2$ です。 $(1 + n) \times n \div 2$ が 2 の倍数であるためには、1+n か n の一方が 4 の倍数でなければなりません。1+n が 4 の倍数の場合、n は 4 の倍数 - 1 ですから、(1) のように n が 4 の倍数か、4 の倍数 - 1 のときに分子は 2 の倍数になります。同様に考えると、 $(1 + n) \times n \div 2$ が 5 か 101 の倍数であるのは、1+n か n の一方が 5 か 101 の倍数の場合です。1+n と n は連続する整数ですから、一方は必ず 2 の倍数になるので、 $\div 2$ は気にしなくて大丈夫です。

よって、n が <4, 5, 101 の倍数> か、<4, 5, 101 の倍数 - 1> とならない場合に、n 番目の分数は既約分数となります。4, 5, 101 の最小公倍数は 2020 ですから周期として長すぎるので、いったん 4, 5 の最小公倍数である 20 の周期で考えると、次のようにになります。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2 の倍数			○	○		○	○		○	○	○	○		○	○		○	○		
5 の倍数				○	○			○	○			○	○			○	○			

今度は、2, 5 の倍数ではない部分に影をつけています。よって、2 か 5 で約分できない分子は 20 個の周期中に 6 個ありますから、その 181 番目は、 $181 \div 6 = 30$ 余り 1 より、 $20 \times 30 + 1 = 601$ です。601 以下の 101 の倍数か 101 の倍数 - 1 である数は、100, 101, 201, 202, 302, 303, 403, 404, 504, 505 です。これらのうちで、4, 5 の倍数か 4, 5 の倍数 - 1 である数は、100, 303, 403, 404, 504, 505 で、すでに除かれています。よって、残りの 101, 201, 202, 302 の 4 つ分答えを 601 からずらすと、順に 602, 606, 613, 617 となりますが、606 も 101 の倍数ですからさらに 1 つずらして、618 番目となります。

受験算数の基礎



最難関問題

(3) 分母が 101 になるのは、 $2020 \div 101 = 20$ より、分子が $20 = 2 \times 2 \times 5$ の倍数で、かつ 101 の倍数ではないような数の場合です。(2) と同様に 101 はいったん脇に置いて、分子が $2 \times 2 = 4$ の倍数か 5 の倍数である場合を考えます。

$(1+n) \times n \div 2$ が 4 の倍数であるためには、 $1+n$ か n の一方が 8 の倍数であればよいので、 n は 8 の倍数か、8 の倍数 - 1 です。

8, 5 の最小公倍数である 40 の周期で考えると、次のようにになります。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4 の倍数							○	○							○	○				
5 の倍数				○	○				○	○				○	○			○	○	

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
4 の倍数			○	○						○	○							○	○	
5 の倍数				○	○				○	○				○	○			○	○	

4 と 5 の倍数の部分に影をつけています。よって、20 で約分できる分子は 40 個の周期中に 3 個ありますから、その 600 番目は、 $600 \div 3 = 200$ より、 $40 \times 200 = 8000$ です。

8000 以下の 101 の倍数か 101 の倍数 - 1 である数について、上の表で影をつけた部分、つまり 40 の倍数か 40 の倍数 + 15 か 40 の倍数 + 39 のいずれかに該当するかどうかをすべてチェックするのはかなり大変ですから、少し手を変えてみます。

101 の倍数が 40 の倍数の場合

101 と 40 の公倍数である、4040 が条件を満たします。

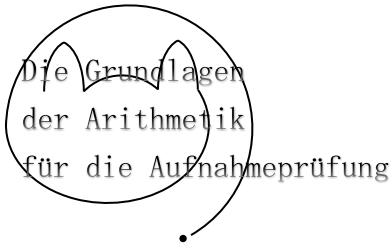
101 の倍数が 40 の倍数 + 15 の場合

40 の倍数 + 15 の一の位は必ず 5 です。一の位が 5 である 101 の倍数は 505, 1515, 2525, 3535, 4545, 5555, 6565, 7575 で、これらのうちで条件を満たすのは 3535, 7575 です。

101 の倍数が 40 の倍数 + 39 の場合

40 の倍数 + 39 の一の位は必ず 9 です。一の位が 9 である 101 の倍数は 909, 1919, 2929, 3939, 4949, 5959, 6969, 7979 で、これらのうちで条件を満たすのは、1919, 5959 です。

受験算数の基礎



最難関問題

101の倍数-1が40の倍数の場合

40の倍数の一の位は必ず0です。101の倍数-1の一の位が0であるためには、101の倍数の一の位が1であればよいので、

$$101 - 1 = 100, \quad 1111 - 1 = 1110, \quad 2121 - 1 = 2120,$$

$$3131 - 1 = 3130, \quad 4141 - 1 = 4140, \quad 5151 - 1 = 5150,$$

$$6161 - 1 = 6160, \quad 7171 - 1 = 7170$$

です。これらのうちで条件を満たすのは2120, 6160です。

101の倍数-1が40の倍数+15の場合

40の倍数+15の一の位は必ず5です。101の倍数-1の一の位が5であるためには、101の倍数の一の位が6であればよいので、

$$606 - 1 = 605, \quad 1616 - 1 = 1615, \quad 2626 - 1 = 2625,$$

$$3636 - 1 = 3635, \quad 4646 - 1 = 4645, \quad 5656 - 1 = 5655,$$

$$6666 - 1 = 6665, \quad 7676 - 1 = 7675$$

です。これらのうちで条件を満たすのは1615, 5655です。

101の倍数-1が40の倍数+39の場合

101の倍数-1が40の倍数+39であるとき、101の倍数は40の倍数+40、つまりは40の倍数ですから、すでに確認した4040です。よって、 $4040 - 1 = 4039$ です。

以上より、8000以下の4と5の倍数である分子のうち、10個が101の倍数となることが分かりました。よって、8000から10個ずらすので、8015, 8039, 8040, 8055, 8079, 8080, 8095, 8119, 8120, 8135となります。8079は101の倍数-1, 8080は101の倍数ですから、さらに2つずらして、8159, 8160より8160番目です。