最難関問題

２０２０の問題・１０

　次のように，ある規則にしたがって，分数が左から順に並んでいます。

$$\frac{1}{2020},\ \frac{1+2}{2020},\ \frac{1+2+3}{2020},\ \frac{1+2+3+4}{2020},\ \cdots$$

次の問いに答えなさい。

（１）約分しない場合，分子が２の倍数になる，小さい方から８番目の分数は，左から何番目に並んでいますか。

（２）小さい方から数えて１８１番目の既約分数は，左から何番目に並んでいますか。

（３）約分しつくすと分母が１０１になる，小さい方から数えて６００番目の分数は，左から何番目に並んでいますか。

最難関問題

２０２０の問題・１０　（１）１６番目　（２）６１８番目　（３）８１６０番目

（１）分子を順番に計算していくと，次のようになります。

左からの順番	1	2	3	4	5	6	7	8
分子	1	3	6	１０	１５	２１	２８	３６

左からの順番	9	１０	１１	１２	１３	１４	１５	１６
分子	４５	５５	６６	７８	９１	105	120	136

分子が２の倍数になる部分に影をつけています。よって，１６番目です。

最難関問題

（２）２０２０＝２×２×５×１０１ですから，分子が２，５，１０１いずれの倍数でもない場合に，既約分数になります。（１）で調べた２の倍数には明らかに規則性がありますから，その仕組みを考えてみます。ｎ番目の分数の分子は，１＋２＋３＋…＋ｎ＝（１＋ｎ）×ｎ÷２です。（１＋ｎ）×ｎ÷２が２の倍数であるためには，１＋ｎかｎの一方が４の倍数でなければなりません。１＋ｎが４の倍数の場合，ｎは４の倍数－１ですから，（１）のようにｎが４の倍数か，４の倍数－１のときに分子は２の倍数になります。同様に考えると，（１＋ｎ）×ｎ÷２が５か１０１の倍数であるのは，１＋ｎかｎの一方が５か１０１の倍数の場合です。１＋ｎとｎは連続する整数ですから，一方は必ず２の倍数になるので，÷２は気にしなくて大丈夫です。

よって，ｎが＜４，５，１０１の倍数＞か，＜４，５，１０１の倍数－１＞とならない場合に，ｎ番目の分数は既約分数となります。４，５，１０１の最小公倍数は２０２０ですから周期として長すぎるので，いったん４，５の最小公倍数である２０の周期で考えると，次のようになります。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
２の倍数			○	○			○	○			○	○			○	○			○	○
５の倍数				○	○				○	○				○	○				○	○

今度は，２，５の倍数ではない部分に影をつけています。よって，２か５で約分できない分子は２０個の周期中に６個ありますから，その１８１番目は，１８１÷６＝３０余り１より，２０×３０＋１＝６０１です。６０１以下の１０１の倍数か１０１の倍数－１である数は，１００，１０１，２０１，２０２，３０２，３０３，４０３，４０４，５０４，５０５です。これらのうちで，４，５の倍数か４，５の倍数－１である数は，１００，３０３，４０３，４０４，５０４，５０５で，すでに除かれています。よって，残りの１０１，２０１，２０２，３０２の４つ分答えを６０１からずらすと，順に６０２，６０６，６１３，６１７となりますが，６０６も１０１の倍数ですからさらに１つずらして，６１８番目となります。

最難関問題

（３）分母が１０１になるのは，２０２０÷１０１＝２０より，分子が２０＝２×２×５の倍数で，かつ１０１の倍数ではないような数の場合です。（２）と同様に１０１はいったん脇に置いて，分子が２×２＝４の倍数か５の倍数である場合を考えます。

（１＋ｎ）×ｎ÷２が４の倍数であるためには，１＋ｎかｎの一方が８の倍数であればよいので，ｎは８の倍数か，８の倍数－１です。

８，５の最小公倍数である４０の周期で考えると，次のようになります。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
４の倍数							○	○							○	○				
５の倍数				○	○				○	○				○	○				○	○

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
４の倍数			○	○							○	○							○	○
５の倍数				○	○				○	○				○	○				○	○

４と５の倍数の部分に影をつけています。よって，２０で約分できる分子は４０個の周期中に３個ありますから，その６００番目は，６００÷３＝２００より，４０×２００＝８０００です。

８０００以下の１０１の倍数か１０１の倍数－１である数について，上の表で影をつけた部分，つまり４０の倍数か４０の倍数＋１５か４０の倍数＋３９のいずれかに該当するかどうかをすべてチェックするのはかなり大変ですから，少し手を変えてみます。

１０１の倍数が４０の倍数の場合

１０１と４０の公倍数である，４０４０が条件を満たします。

１０１の倍数が４０の倍数＋１５の場合

４０の倍数＋１５の一の位は必ず５です。一の位が５である１０１の倍数は５０５，１５１５，２５２５，３５３５，４５４５，５５５５，６５６５，７５７５で，これらのうちで条件を満たすのは３５３５，７５７５です。

１０１の倍数が４０の倍数＋３９の場合

４０の倍数＋３９の一の位は必ず９です。一の位が９である１０１の倍数は９０９，１９１９，２９２９，３９３９，４９４９，５９５９，６９６９，７９７９で，これらのうちで条件を満たすのは，１９１９，５９５９です。

最難関問題

１０１の倍数－１が４０の倍数の場合

　４０の倍数の一の位は必ず０です。１０１の倍数－１の一の位が０であるためには，１０１の倍数の一の位が１であればよいので，

１０１－１＝１００，　　１１１１－１＝１１１０，　２１２１－１＝２１２０，
３１３１－１＝３１３０，　４１４１－１＝４１４０，　５１５１－１＝５１５０，
６１６１－１＝６１６０，　７１７１－１＝７１７０

です。これらのうちで条件を満たすのは２１２０，６１６０です。

１０１の倍数－１が４０の倍数＋１５の場合

　４０の倍数＋１５の一の位は必ず５です。１０１の倍数－１の一の位が５であるためには，１０１の倍数の一の位が６であればよいので，

６０６－１＝６０５，　　１６１６－１＝１６１５，　２６２６－１＝２６２５，
３６３６－１＝３６３５，　４６４６－１＝４６４５，　５６５６－１＝５６５５，
６６６６－１＝６６６５，　７６７６－１＝７６７５

です。これらのうちで条件を満たすのは１６１５，５６５５です。

１０１の倍数－１が４０の倍数＋３９の場合

　１０１の倍数－１が４０の倍数＋３９であるとき，１０１の倍数は４０の倍数＋４０，つまりは４０の倍数ですから，すでに確認した４０４０です。よって，４０４０－１＝４０３９です。

　以上より，８０００以下の４と５の倍数である分子のうち，１０個が１０１の倍数となることが分かりました。よって，８０００から１０個ずらすので，８０１５，８０３９，８０４０，８０５５，８０７９，８０８０，８０９５，８１１９，８１２０，８１３５となりますが，
８０７９は１０１の倍数－１，８０８０は１０１の倍数ですから，さらに２つずらして，
８１５９，８１６０より８１６０番目です。