

最難関問題

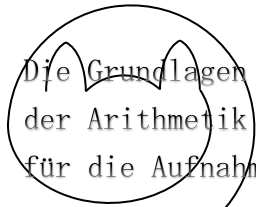
平均点と2位の点（前編）

何人かの生徒がテストを受けたところ、全員が異なる点数を取り、2位の生徒は平均点以下の点数になりました。テストの点数は整数です。

（1）100点満点のテストを5人が受けました。2位の生徒の得点は、最も高くても何点ですか。

（2）100点満点のテストを10人が受けました。2位の生徒の得点は、最も高くても何点ですか。

（3）500点満点のテストを 人が受けたところ、2位の生徒は94点でした。これは、 人が受験をしたときの2位の得点として考えられる最も高い点数で、また、平均点と一致しました。テストを受けた生徒は何人ですか。



最難関問題

平均点と2位の点（前編）

(1) 94点 (2) 64点 (3) 30人

(1) 順に探していくと、

$$(100 + 95 + 94 + 93 + 92) \div 5 = 94.8$$

$$(100 + 94 + 93 + 92 + 91) \div 5 = 94$$

となるので94点です。

(2) 1位が100点、2位以下の点数が連続していて最も低い場合を考えると、次のようになります。

$$(100 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) \div 10 = 14.5$$

ここから2位以下の点数を1点ずつ上げて、 $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2$ とすると、

$9 \div 10 = 0.9$ (点) 平均点は上がります。2位の点数は1点上がっているの、 $1 - 0.9 = 0.1$ (点)

点差が小さくなります。 $(14.5 - 9) \div 0.1 = 55$ (回) この操作を繰り返すと、

2位の点数は $9 + 55 = 64$ (点)、平均点は $14.5 + 0.9 \times 55 = 64$ (点) となって一致します。

よって、64点です。

(3) $500 + 94 + 93 + 92 + \dots$ が94の倍数なので、500, 93, 92, ...をそれぞれ94で割ったときの余りの合計が94の倍数になるという点に注目します。計算を簡単に行うために、余りと94の差で考えます。

	500	93	92	91	90	...
$94 - (\div 94 \text{ の余り})$	64	1	2	3	4	...

$64 + 1 + 2 + 3 + \dots$ が94の倍数になればよいので、 $1 + 2 + 3 + \dots$ という三角数が、 $94 - 64 = 30$ に94をいくつか加えた数になる場合を探します。

30, 124, 218, 312, 406と探していくと、 $406 = 1 + 2 + 3 + \dots + 28$ が三角数です。

このとき、3位以下の28人の点数は93点, 92点, 91点, ..., 66点です。

$$(500 + 93 + 92 + 91 + \dots + 66) \div 29 = 94 \text{ となるので、条件を満たします。}$$

よって、30人です。