



最難関問題

年間カレンダーの問題・1

1年間の日付けを1つにまとめたカレンダーがあります。この年は平年で、1月1日は月曜日です。下の図はこのカレンダーの1月と2月の最初までをぬきだしたものです。

日	月	火	水	木	金	土
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10

(1) 右の図のたて3マスの枠によってカレンダーの3つの日付けを囲み、その和を求めます。和が7の倍数になるような枠の置き方は何通りありますか。

(2) 右の図のたて3マス横2マスの枠によってカレンダーの6つの日付けを囲み、その和を求めます。和が7の倍数より1小さい数になるような枠の置き方は何通りありますか。



最難関問題

年間カレンダーの問題・1 (1) 4 6 通り (2) 4 5 通り

(1) 右の図の○, △, □が同じ月か異なる月かで場合分けをします。

同じ月の場合

○が7の倍数=7で割った余りが0の数の場合, △と□も余りが0ですから, 3つの数の和を7で割った余りは $0 \times 3 = 0$ となります。1年間のどの月でも○にあてはまる数は7か14なので, $2 \times 12 = 24$ (通り) です。

○
△
□

異なる月の場合

枠が2つの月にまたがる場合は, 前月が大の月(31日まである月), 小の月(30日まである月), 2月の場合で分けます。一般には2月も小の月ですが, ここでは区別して扱います。

○前月が大の月

前月の31日の翌週が次月の7日なので, 前月の日付けが7で割って3余る数の場合, 同じ列の次月の日付けは7で割って0余る数です。こうして, 下の表で日付を7で割った余りを対応付けることができます。

ここで, ○と△が前月の場合を(ア), ○だけが前月の場合を(イ)とします。

(ア)の場合は, (前月の余り $\times 2$) + (次月の余り)が枠に囲まれた3つの数の余りの和で,

(イ)の場合は, (前月の余り) + (次月の余り $\times 2$)が枠に囲まれた3つの数の余りの和です。

前月	4	5	6	0	1	2	3
次月	1	2	3	4	5	6	0
(ア)	9	12	15	4	7	10	6
(イ)	6	9	12	8	11	14	3

余りの和が7の倍数になれば, 7で割りきれます。表の影をつけた部分はその条件を満たすので, 12月を除いた大の月である1月, 3月, 5月, 7月, 8月, 10月についてはそれぞれ2通りの枠の置き方がありますから, $2 \times 6 = 12$ (通り) です。



最難関問題

○前月が小の月

大の月の場合と同様に表を作ると、下のようになります。

前月	3	4	5	6	0	1	2
次月	1	2	3	4	5	6	0
(ア)	7	10	13	16	5	8	4
(イ)	5	8	11	14	10	13	2

表の影をつけた部分が7の倍数なので、2月を除いた小の月である4月、6月、9月、11月についてはそれぞれ2通りの枠の置き方がありますから、 $2 \times 4 = 8$ (通り) です。

○前月が2月

表を作ると、下のようになります。

前月	1	2	3	4	5	6	0
次月	1	2	3	4	5	6	0
(ア)	3	6	9	12	15	18	0
(イ)	3	6	9	12	15	18	0

表の影をつけた部分が7で割り切れるので、2通りです。

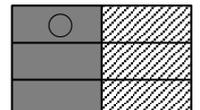
以上より、 $24 + 12 + 8 + 2 = 46$ (通り) です。

(2) (1) と同様に場合分けをしますが、今回は枠が2列なので、表に収まるためには下の図で影をつけた左側の列が日曜～金曜でなければなりません。このような曜日の条件を扱うために、最初に各月の1日の曜日をまとめると、次のようになります。

月曜日…1月・10月，火曜日…5月，水曜日…8月，木曜日…2月・3月・11月
金曜日…6月，土曜日…9月・12月，日曜日…4月・7月

同じ月の場合

右の枠において影をつけた列と斜線部分の列はそれぞれ7で割った余りが等しくなります。それぞれを a 、 b とすると、余りの和は $(a + b) \times 3$ ですから、これが7の倍数より1小さい数のときに条件を満たします。あてはまるのは、

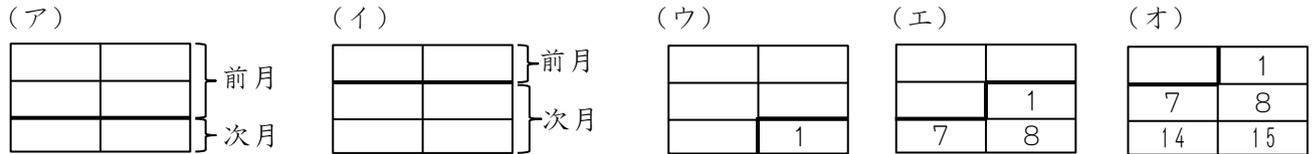


$(4 + 5) \times 3 = 27$ の場合です。このとき、枠の左上のマスの○にあてはまる数は、4か11です。よって、4日の曜日がカレンダーの端である土曜日でなければ、つまりはその月の1日が水曜日でなければ、その月には2通りのこのような枠を置き方があります。8月以外は条件を満たすので、 $2 \times 11 = 22$ (通り) です。

最難関問題

異なる月の場合

枠が2つの月にまたがる場合は、下の(ア)～(オ)の場合に分かれます。



(ア)(イ)の場合は、(1)同様に場合分けをします。

○前月が大の月

(1)の表を利用し、右隣りの列の数とたし算をします。

前月	4	5	6	0	1	2	3
次月	1	2	3	4	5	6	0
(ア)	9	12	15	4	7	10	6
(イ)	6	9	12	8	11	14	3

➡

4	5	6	0	1	2	3
1	2	3	4	5	6	0
21	27	19	11	17	16	15
15	21	20	19	25	17	9

表の影をつけた部分が7の倍数より1小さい数です。(ア)の場合は前月の5日が土曜日、つまり1日が火曜日でなければ枠ははみ出さず、(イ)の場合は前月の6日が土曜日、つまり1日が月曜日でなければ枠ははみ出しません。

(ア)の条件を満たすのは1月、3月、7月、8月、10月、

(イ)の条件を満たすのは3月、5月、7月、8月、となるので、9通りです。

○前月が小の月

同様に(1)の表を利用し、右隣りの列の数とたし算をします。

前月	3	4	5	6	0	1	2
次月	1	2	3	4	5	6	0
(ア)	7	10	13	16	5	8	4
(イ)	5	8	11	14	10	13	2

➡

3	4	5	6	0	1	2
1	2	3	4	5	6	0
17	23	29	21	13	12	11
13	19	25	24	23	15	7

表の影をつけた部分が7の倍数より1小さい数です。(ア)の場合は前月の7日が土曜日、つまり1日が日曜日でなければ枠ははみ出さず、(イ)の場合は前月の3日が土曜日、つまり1日が木曜日でなければ枠ははみ出しません。

(ア)の条件を満たすのは6月、9月、11月、

(イ)の条件を満たすのは4月、6月、9月、となるので、6通りです。

