

最難関問題

最も遠い点への最短距離

(1) 図1の直角三角形を4個組み合わせて、図2の正方形A B C Dを作りました。

(ア) 図3の斜線部分の長方形の面積を求めなさい。

(イ) 図1の x にあてはまる数を求めなさい。

図1

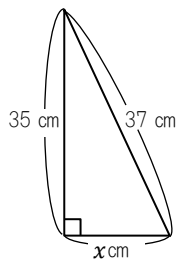


図2

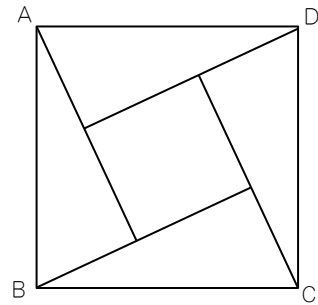
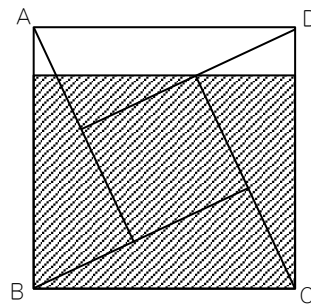


図3



最難関問題

- (2) 1 辺 4 cm の立方体 $ABCD-EFGH$ の面 $BFGC$ 上にある点 P から、立方体の表面をたどって他の面にある点に最短距離で移動します。このとき、最短距離が最も長くなる点 Q を考えます。
(ア) 点 P が図 4 の位置にあるとき、点 Q の位置を図 5 のように解答らんにかきなさい。

図 4

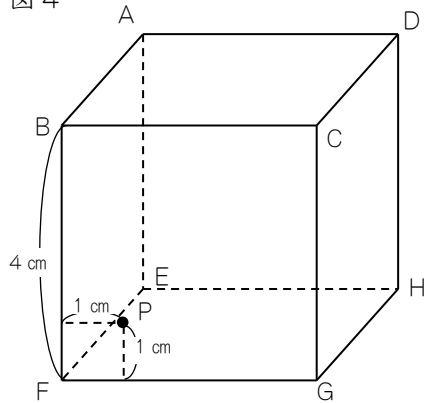
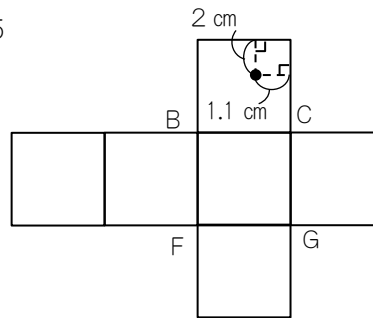
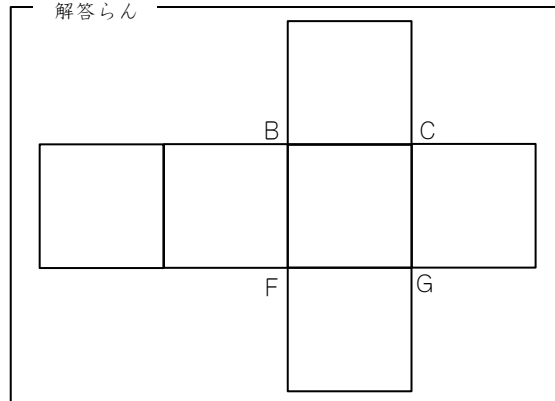


図 5

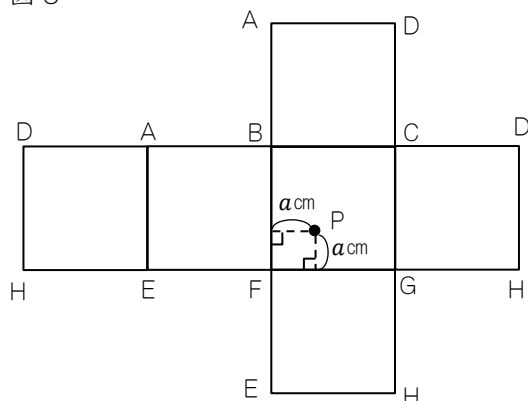


解答らん



- (イ) 点 P が図 6 の位置にあって、 a が 2 以下の数のとき、点 P と Q の立方体の表面をたどった最短距離が 8.2 cm になりました。このときの、 a にあてはまる数を答えなさい。

図 6



最難関問題

最も遠い点への最短距離

(1) (ア) 1225 cm^2 (イ) $x = 12$

(2) (ア) 解説参照 (イ) $a = 1.1$

(1) この問題は過去作の「ピタゴラスの定理の証明法」と同内容です。

(ア) 図①のように点E～Jをきめると、長方形BCFEの面積は、

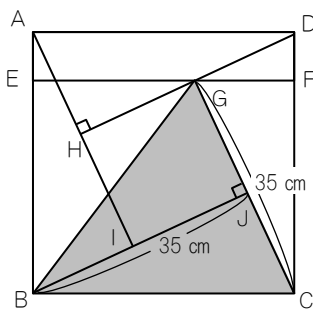
$$35 \times 35 \times \frac{1}{2} \times 2 = 1225 \text{ (cm}^2\text{)} \text{ です。}$$

(イ) 長方形AEFDの面積は、 $37 \times 37 - 35 \times 35 = 144 \text{ (cm}^2\text{)}$ です。図②のように

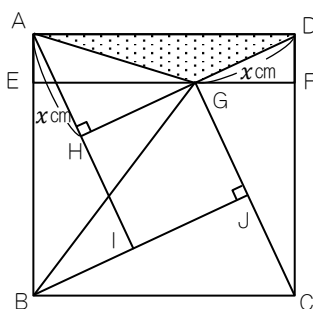
$$\text{長方形AEFDの面積は、} x \times x \times \frac{1}{2} \times 2 = x \times x = 144 \text{ となるので、} x = 12 \text{ です。}$$

こうして、図③のように直角三角形において、直角をはさむ2辺の長さをそれぞれ自分とかけあわせた平方数の和は、のこる1辺を自分とかけあわせた平方数に等しくなります（ピタゴラスの定理）。

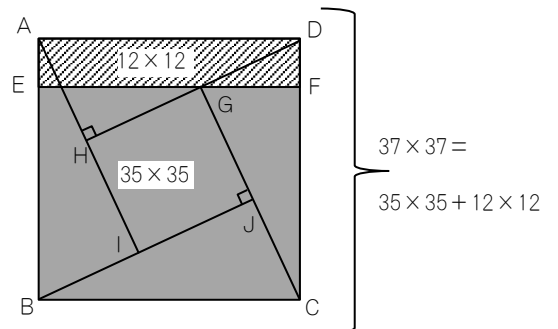
図①



図②



図③



最難関問題

(2)

(ア) 点Qは明らかに面A E H D上にあります。点Pから面A E H Dへの最短ルートとして、まず、面B F G Cと面A E H Dの間に1つの面を通過する4通りを考えます。面A E H Dを中心に立方体を展開した図④において、4通りの経路に応じて、点PをP 1～P 4に分けると、P 1とP 2から等距離にある点は、まっすぐな線P 1 P 2の垂直二等分線L 1上にあります。同様に、P 3とP 4から等距離にある点は、まっすぐな線P 3 P 4の垂直二等分線L 2上にあります。L 1とL 2の交点である点Kが点Qであるかを考えます。点Kは、図⑤のように4点P 1～4から等距離にあります。

点Kによって、面A D H Eを4つの三角形K D H, K H E, K E A, K A Dに分けて、点Qが点Kではなくて、いずれかの三角形の内部にある可能性を考えます。三角形K D Hの内部に点Qがある場合を図⑥において考えます。

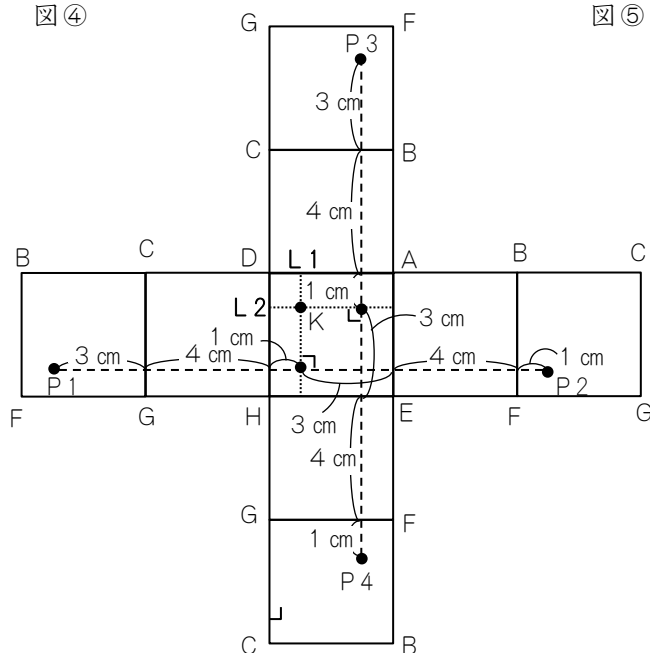
P 1から点Kまでの距離を x とすると、 $x \times x = 8 \times 8 + 2 \times 2 = 68$,

P 1から点Dまでの距離を x とすると、 $x \times x = 7 \times 7 + 3 \times 3 = 58$,

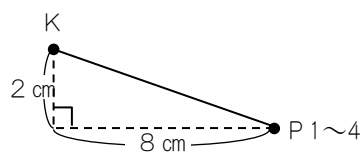
P 1から点Hまでの距離を x とすると、 $x \times x = 7 \times 7 + 1 \times 1 = 50$,

となるので、3点K, D, Hを比べると、点KがP 1から最も遠い点になります。ここで、P 1を中心として円周上に点Kがある円の一部をかくと、辺K D, K Hは円周より内側を通過するので、三角形K D Hは円の内部に収まります。よって、点Qが点Kを除く三角形K D Hの内部に存在することはありません。三角形K H Eと点P 4, 三角形K E Aと点P 2, 三角形K A Dと点P 3についても同様なので、点Qと点Kは重なります。

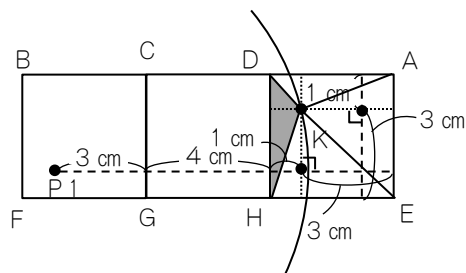
図④



図⑤



図⑥

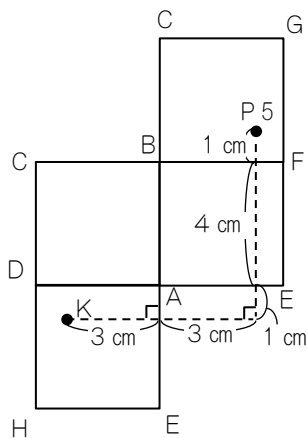


最難関問題

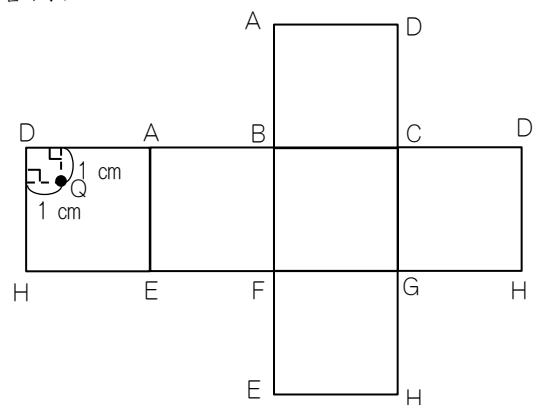
面 $BFGC$ と面 $A E H D$ の間に 2 つ以上の面を通過する場合は, 例えば 2 面を通過するときは図⑦が最短となります。このとき, $P5$ から点 K までの距離を x とすると, $x \times x = 6 \times 6 + 6 \times 6 = 72$ となるので, 距離はより長くなります。3 面以上の場合も同様です。

よって, 右下の図が解答例になります。点 Q の位置が < 解答例 > と同じであれば正解です。

図⑦



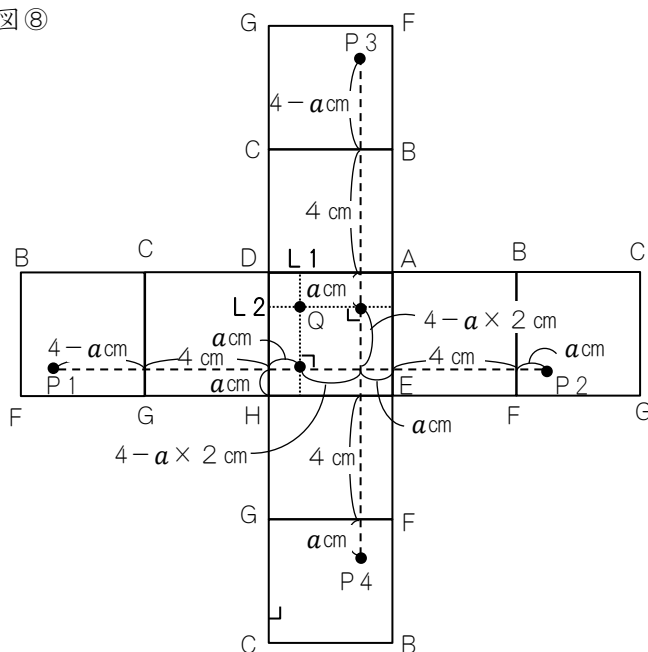
< 解答例 >



(イ) 図⑧のようになって, PQ 間の最短距離 8.2 cm は図⑨で捉えることができます。

$8.2 \times 8.2 - 8 \times 8 = 3.24 = 1.8 \times 1.8$ より, $4 - a \times 2 = 1.8$ より, $a = 1.1$ です。

図⑧



図⑨

