# 最難関問題

けた入れ替えの問題・１

　１１２の各位の数を並びかえると，１１２も含めて３通りの整数，１１２，１２１，２１１ができます。また，その和は１１２＋１２１＋２１１＝４４４です。次の問いに答えなさい。

（１）１３５０の各位の数を並びかえてできる整数の和を求めなさい。

（２）ある４けたの整数Ｘの各位の数を並びかえてできる整数の和を求めたところ，（１）で求めた１３５０の各位の数を並びかえてできる整数の和に等しくなりました。また，Ｘに現れる４つの数のうち１つを０に変えた整数Ｙについて，Ｙの各位の数を並びかえてできる整数の和を求めたところ，３１１１０になりました。Ｘに現れる４つの数を答えなさい。

# 最難関問題

けた入れ替えの問題・１　（１）５１５５２　（２）０，４，６，６

（１）１，３，５，０を並びかえてできる４けたの整数は，３×３×２×１＝１８（通り）あります。千の位に現れる数は１，３，５の３つで，それぞれ１８÷３＝６（回）現れます。ここで数１に注目をすると，全部で１８回現れ，そのうち６回千の位に現れるので，一，十，百の位には，（１８－６）÷３＝４（回）ずつ現れます。よって，１３５０の各位の数を並びかえてできる整数の和は，
（１＋３＋５）×６４４４＝５１５５２です。

（２）０を含まない４けたの整数の場合，並びかえてできる整数の和は５１５５２になるのでしょうか。いくつかの例を考えてみます。

ａｂｃｄ…並びかえて４×３×２×１＝２４（通り）あるので，ａ，ｂ，ｃ，ｄは各位に
２４÷４＝６（回）ずつ現れます。よって和は，（ａ＋ｂ＋ｃ＋ｄ）×６×１１１１

ａａｂｃ…並びかえて４×３＝１２（通り）あり，ｂ，ｃは各位に１２÷４＝３（回）ずつ，
ａは３×２＝６（回）現れます。よって和は，（ａ×２＋ｂ＋ｃ）×３×１１１１

結局のところ整数Ｘが０を含まないのであれば，Ｘに現れる数は，並びかえにおいてどの位にも同じ回数現れるので，並びかえてできる整数の和は１１１１の倍数になります。５１５５２は１１１１で割り切れないので，整数Ｘは０を含みます。

０を１つ含む４けたの整数の場合，次のような場合を考えることができます。

ａｂｃ０…（１）より，（ａ＋ｂ＋ｃ）×６４４４＝（ａ＋ｂ＋ｃ）×２×３２２２

ａａｂ０…ａ，ａ，ｂ，０を並びかえてできる４けたの整数は，１８÷２＝９（通り）あります。千の位には０が現れないので，ａが６回，ｂが３回現れます。また，一，十，百の位には０が，９÷３＝３（回）ずつ現れるので，ａとｂはあわせて９－３＝６（回），よってａが４回ずつ，ｂが２回ずつ現れます。よって，ａａｂ０の各位の数を並びかえてできる整数の和は，（ａ×２＋ｂ）×３２２２です。

ａａａ０…ａ，ａ，ａ，０を並びかえてできる４けたの整数は，ａａａ０，ａａ０ａ，ａ０ａａの３通りで，その和はａ×３２２２です。

このように，和はいずれも３２２２の倍数となります。

# 最難関問題

０を２つ含む４けたの整数の場合，次のような場合を考えることができます。

ａｂ００…ａ，ｂ，０，０を並びかえてできる４けたの整数は，２×３＝６（通り）あります。千の位には０が現れないので，ａが３回，ｂが３回現れます。また，一，十，百の位には０が，１２÷３＝４（回）ずつ現れるので，ａとｂはあわせて６－４＝２（回），よってａ，ｂともに１回ずつ現れます。よって，ａｂ００の各位の数を並びかえてできる整数の和は，（ａ＋ｂ）×３１１１です。

ａａ００…ａ，ａ，０，０を並びかえてできる４けたの整数は， ａａ００，ａ０ａ０，ａ００ａの３通りで，その和はａ×３１１１です。

このように，和はいずれも３１１１の倍数となります。

（1）より５１５５２＝１６×３２２２です。また，３１１１０＝１０×３１１１なので，整数Ｙはａｂ００でａ＋ｂ＝１０です。このとき，整数Ｘはａｂｃ０かａａｂ０です。

ａｂｃ０…並びかえてできる整数の和は（ａ＋ｂ＋ｃ）×２×３２２２なので，（ａ＋ｂ＋ｃ）×２＝１６よりａ＋ｂ＋ｃ＝８となって，条件を満たしません。

ａａｂ０…並びかえてできる整数の和は（ａ×２＋ｂ）×３２２２なので，ａ×２＋ｂ＝１６よりａ＝６，ｂ＝４となります。

以上より，整数Ｘは６６４０のように，６が２個，４と０が１個現れる数，整数Ｙは，６４００のように６と４が１個，０が２個現れる数です。