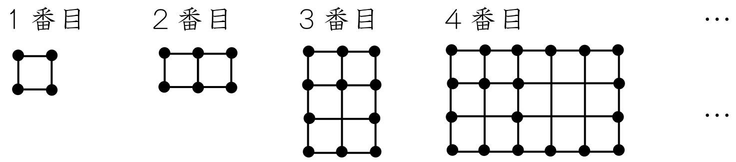
最難関問題

黄金長方形の多角数

下の図のきまりにしたがって，方眼上にご石を次々と置いて正方形を作っていきます。

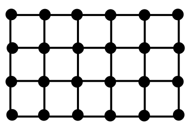


１番目では４個，２番目では２個，３番目では５個，４番目では８個のご石を置いています。

△番目に置いたご石の数より（△＋１）番目に置いたご石の数は４７９１個多く，
（△＋１）番目に置いたご石の数より（△＋２）番目に置いたご石の数は７７５２個多くなりました。

（１）△番目に置いたご石は何個ですか。

（２）△番目にご石を置いたところで作業をやめて，作った正方形の内部で方眼の頂点にあたるところにご石を置きました。このとき，完成した長方形にはご石が全部で何個使われていますか。例えば４番目で作業をやめてご石を置くと，下の図のようになり，ご石は全部で２４個になります。



最難関問題

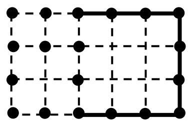
黄金長方形の多角数　（１）７７５１個　（２）１０８１０４７０個

（１）正方形の１辺の長さが何マス分にあたるのかと，そのときに置くご石の個数は，図①の表のようになります。

図①

番目	1	2	3	4
長さ	1	1	2	3
ご石	4	2	5	8

図②



正方形の各辺の長さは，前の２つの正方形の辺の長さの和となっているので，フィボナッチ数列になります。新たに置くご石の個数について，図②の４番目の正方形を例にとって考えると，新たに増える辺の長さの和は３×３＝９（マス分）なので，ご石は９－１＝８（個）増えていますから，
（１辺の長さ）×３－１となります。
このことを利用して表をもう少しのばすと，図③のようになります。

図③

番目	1	2	3	4	5	6	7	8
長さ	1	1	2	3	5	8	１３	２１
ご石	4	2	5	8	１４	２３	３８	６２

図③の表を参考にして，問題の条件で与えられている，新たに置くご石の個数の差を考えます。例えば６番目の正方形ではご石は（８×３－１）個置き，７番目の正方形ではご石は（１３×３－１）個置きますから，その差は（１３－８）×３です。１３－８は５番目の正方形の１辺の長さの５にあたりますから，その３倍の５×３＝１５（個）が６番目と７番目に置いたご石の個数の差となります。また，個数の差１５から１を引くと１５－１＝１４となって，５番目に置いたご石の個数となります。

よって，（△＋１）番目に置いたご石の数より（△＋２）番目に置いたご石の数は７７５２個多いことから，△番目に置いたご石は，７７５２－１＝７７５１（個）となります。

最難関問題

（２）（１）にしたがって下の図④の表を仕上げていきます。△番目に置いたご石の数より（△＋１）番目に置いたご石の数は４７９１個多いことから，（△－１）番目に置いたご石は，
４７９１－１＝４７９０（個）となり，（△－１）番目の正方形の長さは
４７９１÷３＝１５９７（マス分），△番目の正方形の長さは７７５２÷３＝２５８４（マス分）となります。（△＋１）番目の正方形の１辺の長さが１５９７＋２５８４＝４１８１（マス分）なので，△番目までご石を置いたときの長方形のたてと横の長さは，２５８４マス分と４１８１マス分です。

図④

番目	△－１	△	△＋１	
長さ	1597	2584	4181	
ご石	4790	7751		

よって，完成した長方形にはご石が全部で，２５８５×４１８２＝１０８１０４７０（個）使われています。