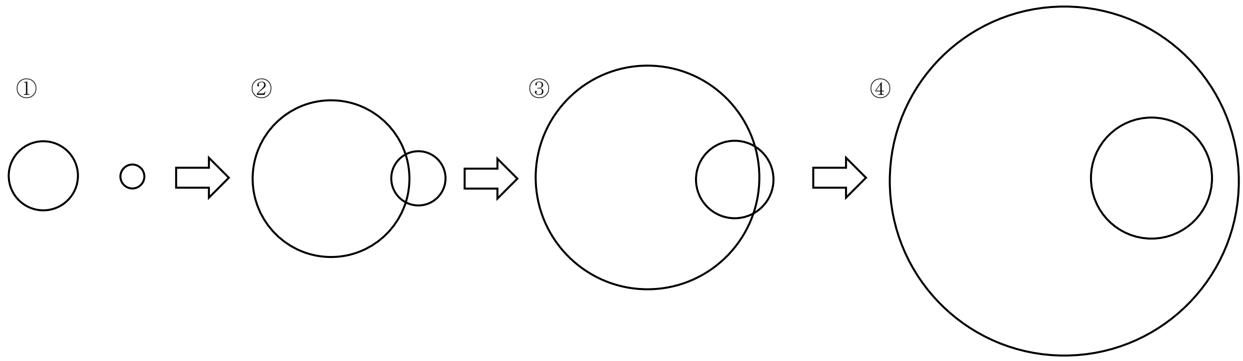
受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

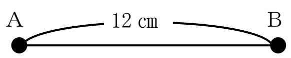
最難関問題

ネミアナ・シンプレックス

　中心の位置を変えずに大きくなっていく円を考えます。例えば，下図のように大きくなる速さが異なる２つの円の場合，①の段階では２つの円は交わっていませんが，②と③の段階では交わり，やがて④のようになります。④の場合，２つの円は重なっていますが，円周は交わりません。この場合も，「２つの円は交わっていない」と言うことにします。

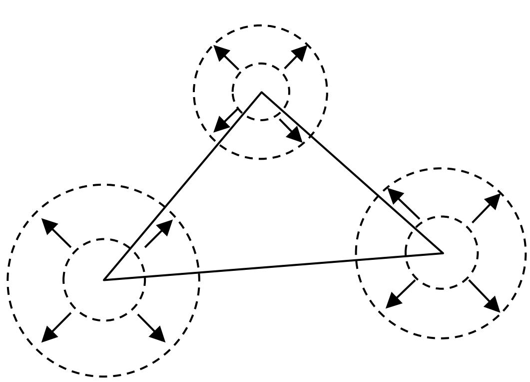


（１）離れた２点ＡとＢを中心とする２つの円が，半径０㎝から同時に大きくなり始めます。Ａを中心とする円は半径が毎秒２㎝の割合で大きくなり，Ｂを中心とする円は半径が毎秒１㎝の割合で大きくなります。２つの円が交わっているのは，大きくなり始めてから何秒後から何秒後までですか。



（２）三角形の３つの頂点を中心とする３つの円が半径０㎝から同時に異なる一定の速さで大きくなり始めたところ，円の交わりは次のようになりました。

・０秒後から６秒後…円の交わりはない
・６秒後から８秒後…２組の円が交わる
・８秒後から１８秒後…３組の円が交わる
・１８秒後から２０秒後…２組の円が交わる
・２０秒後から３６秒後…１組の円が交わる
・３６秒後以降…円の交わりはない



このとき，三角形の３辺の長さの比を求めなさい。答えがいくつもある場合には，すべて答えなさい。

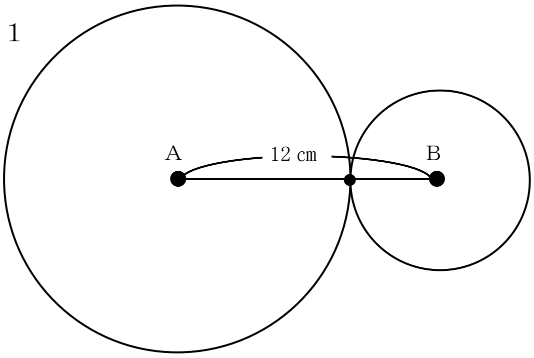
最難関問題

ネミアナ・シンプレックス　（１）４秒後から１２秒後まで

（２）３：５：６，２５：３９：４２（順番を入れかえたものも正解）

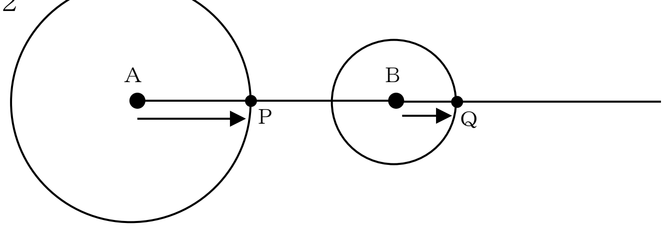
（１）２つの円が交わり始めるのは，図１のように２つの円の半径の和が１２㎝になったときです。よって，１２÷（２＋１）＝４（秒後）からです。

図１



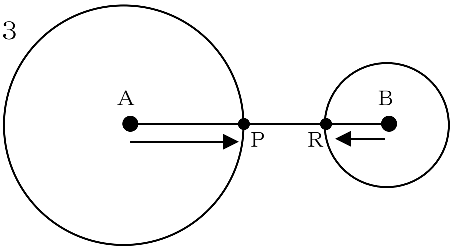
２つの円が交わり終わるのはどういう場合でしょうか。図２において，Ａを中心とする円の円周のうちで，Ｂに最も近い点をＰとします。Ｐは直線ＡＢ上を右に向かって進みます。また，Ｂを中心とする円の円周のうちでＡから最も遠い点をＱとします。Ｑも直線ＡＢ上を右に向かって進みます。ＰがＱに追いつくと，２つの円は交わり終わります。それは，１２÷（２－１）＝１２（秒後）です。よって，１２秒後までは２つの円は重なります。

図２



ここから改めて２つの円の交わり始めを考えると，直線ＡＢ上を右に進む点Ｐと，Ｂを中心とする円の円周上にあってＡＢ上を左に進む点Ｒが出会ったときであることがわかります。

図３



以上より，円が交わり始める時間は（中心の間の距離）÷（円が大きくなる速さの和）で求まり，円が交わり終わる時間は（中心の間の距離）÷（円が大きくなる速さの差）で求まることがわかります。

最難関問題

（２）どれか２つの円が交わり始めるのは，６秒後に２組と８秒後に１組です。また，交わり終わるのは１８秒後，２０秒後，３６秒後に１組ずつです。

6秒後		18秒後
6秒後	⇨	20秒後
8秒後		36秒後

よって，これらの組合せを考えます。８秒後に交わり始めた円が交わり終える時間に注目して，３６秒後，２０秒後，１８秒後の３通りについて考えます。

〇３６秒後の場合

２つの円の中心の距離を速さの和で割ると８秒，差で割ると３６秒になるので，速さの和と差の比は３６：８＝９：２となります。よって，２つの円の大きくなる速さの比は，（９＋２）÷２：（９－２）÷２＝１１：７となります。同様のことを他の組についても行うと，次のようになります。

出会いにかかる時間	追いつきにかかる時間	速さの和と差の比	大きくなる速さの比
８秒間	３６秒間	９：２	１１：７
６秒間	１８秒間	３：１	２：１
６秒間	２０秒間	１０：３	１３：７

こうして，３つの円の内２つを選んで速さの比を求めると，１１：７，２：１，１３：７となることがわかりました。これらの比は，きちんと連比できるのでしょうか。１１：７の１１を２：１の２か１，１３：７の１３か７のどれかとそろえて比が全て成り立てばよいので，４通りの場合を調べます。

11：7
2　：　1
22：14：11
↕ 不一致
13：7

11：7
1　：　2
11：7：22
↕ 不一致
7：13

11：7
13　：　7
143：91：77
↕ 不一致
2：1

11：7
7　：　13
77：49：143
↕ 不一致
1：2

このように，全ての場合について連比をすることができません。よって，８秒後に交わり始めた円が交わり終わるのは３６秒後ではないということがわかります。

最難関問題

○２０秒後の場合

比を整理すると，次のようになります。

出会いにかかる時間	追いつきにかかる時間	速さの和と差の比	大きくなる速さの比
８秒間	２０秒間	５：２	７：３
６秒間	１８秒間	３：１	２：１
６秒間	３６秒間	６：１	７：５

７：３，２：１，７：５の３つの比は，やはり連比することができません。８秒後に交わり始めた円は２０秒後に交わり終わったのでもないのです。

７：３
２　：　１
14：６：７
↕ 不一致
５：７

７：３
１　：　２
７：３：14
↕ 不一致
５：７

７：３
７　：　５
７：３：５
↕ 不一致
１：２

７：３
５　：　７
35：15：49
↕ 不一致
１：２

○１８秒後の場合

比を整理すると，次のようになります。

出会いにかかる時間	追いつきにかかる時間	速さの和と差の比	大きくなる速さの比
８秒間	１８秒間	９：４	１３：５
６秒間	２０秒間	１０：３	１３：７
６秒間	３６秒間	６：１	７：５

この場合，２通りの連比が可能です。

13：５
13　：　７
13：５：７
↕ 一致
５：７

13：５
７　：　13
91：35：169
↕ 不一致
５：７

13：５
７　：　５
91：35：65
↕ 一致
７：13

13：５
５　：　７
65：25：91
↕ 不一致
７：13

速さの比が１３：５：７のとき，三角形の辺の長さの比は，
（１３＋５）×８秒：（１３＋７）×６秒：（７＋５）×６秒＝６：５：３です。

また，速さの比が９１：３５：６５のとき，三角形の辺の長さの比は，
（９１＋３５）×８秒：（９１＋６５）×６秒：（３５＋６５）×６秒＝４２：３９：２５です。

尚，１３：５：７と９１：３５：６５という２つの連比が可能である事情については，別の問題（逆比の双対性）で取り上げます。